

U1.T1 — Notação indicial e álgebra tensorial

MAE369 — Mecânica e Fenômenos de Transporte · IM/UFRJ · 2026/2

01 | Abertura do curso

Organização da disciplina

Encontros**Avaliação****Ferramentas****Datas**

Segundas e quartas, 10h–12h

P1 e P2 (30% cada) · quatro listas (5% cada) · mini-projeto (20%)

Python e NumPy, com implementação própria dos métodos numéricos; FEniCSx apenas na Unidade 9, como implementação de referência no calendário publicado na página da disciplina

O método central do curso

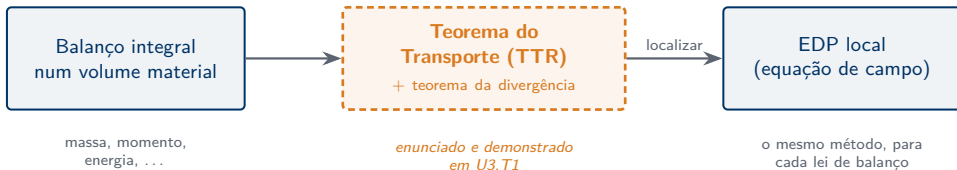


Figura 1

As leis de balanço da mecânica do contínuo são obtidas por **um único método**, aplicado repetidamente. As duas primeiras unidades constroem a linguagem matemática que esse método exige.

A questão que organiza esta unidade

QUESTÃO EM ABERTO

Por que a mecânica do contínuo precisa de todo esse formalismo tensorial?

A resposta não é dada nesta unidade. Ela aparece em **U3.T1**, quando o Teorema do Transporte converter balanços integrais em equações diferenciais.

02 | A convenção de soma

A convenção de soma

$$s = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{indicial})$$

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{direta})$$

Um índice repetido em um monômio indica soma sobre $\{1, 2, 3\}$. Índices latinos i, j, k, m, n percorrem sempre esse conjunto (Lai, Rubin, e Kreml 2010).

A convenção de soma

$$s = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{indicial})$$

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{direta})$$

Um índice repetido em um monômio indica soma sobre $\{1, 2, 3\}$. Índices latinos i, j, k, m, n percorrem sempre esse conjunto (Lai, Rubin, e Kreml 2010).

A **letra** escolhida para um índice somado é arbitrária: $a_i b_i$ e $a_m b_m$ denotam o mesmo número.

A letra do índice é arbitrária

Com índice livre, não

$$a_i = b_i$$

$$a_m = b_m$$

trocar dos dois lados: válido

$$a_m = b_i$$

trocar de um lado só: inválido

índice mudo pode ser renomeado; índice livre, não

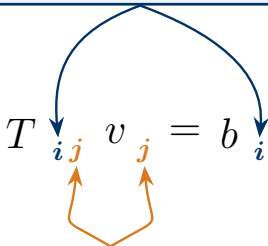
Animado na versão web — quadro final mostrado.

Índices livres e índices mudos

índice LIVRE

aparece exatamente *uma* vez em cada termo

⇒ isto são **três** equações, $i = 1, 2, 3$


$$T_{ij} v_j = b_i$$

$$b_1 = T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3$$

índice MUDO

aparece *duas* vezes no mesmo termo ⇒ soma sobre $j = 1, 2, 3$

a letra é arbitrária: $T_{im}v_m$
é a mesma expressão

Correspondência entre as duas notações

indicial	direta / matricial
$a_i b_i$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$T_{ij} v_j$	$\mathbf{T} \mathbf{v}$
$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$	$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$
$A_{ij} B_{ij}$	$\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$

Na última linha, a expressão indicial é mais curta que a direta. Esse é o primeiro caso; haverá outros, em ambas as direções.

O delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \delta_{ij}a_j = a_i \quad \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{indicial})$$
$$[\delta_{ij}] = \mathbf{I} \quad \mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \mathbf{I}\mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (\text{direta})$$

O delta atua **substituindo um índice por outro**; é assim que ele aparece na maioria das derivações do curso.

ATENÇÃO

$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$. O índice está repetido, portanto somado.

Convenção: bases ortonormais

CONVENÇÃO ADOTADA EM TODO O CURSO

Salvo menção explícita em contrário, toda base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ utilizada neste curso é **ortonormal**:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

É essa hipótese que permite obter componentes **por projeção** — como faremos a seguir, ao escrever $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j$. Em mecânica do contínuo ela é adotada quase sempre, e vamos mantê-la ao longo de toda a disciplina.

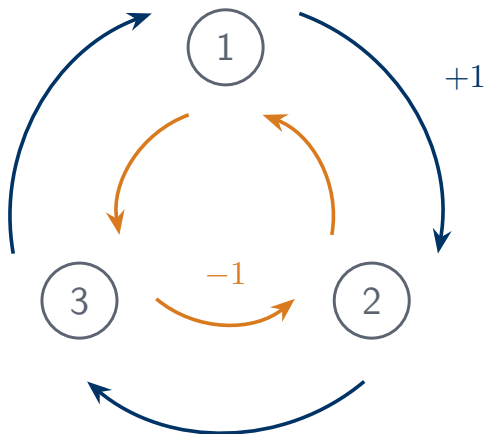
Origem histórica da notação

- **1822** — Cauchy descreve o estado de tensão em um ponto por meio de nove quantidades. A álgebra sistemática para manipulá-las ainda não existia.
- **1916** — Einstein adota a supressão do símbolo de somatório para índices repetidos, uma simplificação de escrita que se tornou padrão.

A notação foi desenvolvida em resposta a problemas concretos da mecânica do contínuo. O ensino, por necessidade, apresenta-a antes dos problemas que a motivaram.

03 | O símbolo de permutação

O símbolo de permutação



$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{333} = \dots = 0$$

qualquer índice repetido anula

trocar dois índices troca o sinal:

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$$

Figura 3

Produto vetorial e determinante

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{direta})$$

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \quad \Longleftrightarrow \quad \det[\mathbf{A}]$$

Nestes dois casos a notação direta apenas **nomeia** a operação: o cálculo efetivo é feito na forma indicial. As duas notações, portanto, não são intercambiáveis.

RESULTADO 1.1 – IDENTIDADE E- Δ

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Esta identidade converte todo produto de dois símbolos de permutação em deltas — e, portanto, todo produto vetorial duplo em produtos escalares.

Demonstração: os quatro casos

Os quatro casos abaixo esgotam todas as escolhas de (j, k, m, n) .

	hipótese	lado esquerdo	lado direito
1	$j = k$ ou $m = n$	0	0
2	$j \neq k, (m, n) = (j, k)$	+1	+1
3	$j \neq k, (m, n) = (k, j)$	-1	-1
4	$j \neq k, m \neq n, \{m, n\} \neq \{j, k\}$	0	0

Verificamos os **casos 1 e 2** no quadro. Os **casos 3 e 4** são o item (a) do exercício PS1.1.

Exercício PS1.1

PS1.1 – DERIVAÇÃO GUIADA

- (a) Verificar os casos 3 e 4 da demonstração do Resultado 1.1.
- (b) Usando (a), mostrar que $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$ e $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.
- (c) Usando o Resultado 1.1, obter $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

VERIFICAÇÃO NUMÉRICA – UNIDADE 1, LABORATÓRIO

```
np.einsum('ijk,imn->jkmn', eps, eps)
```

04 | O que é um tensor

Primeira definição: transformação linear

DEFINIÇÃO 1.4 – TENSOR COMO TRANSFORMAÇÃO LINEAR

T é um **tensor de segunda ordem** se associa a cada vetor um vetor e é linear:

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{Ta} + \beta \mathbf{Tb}.$$

Exemplos: o tensor identidade, uma projeção ortogonal, uma rotação. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.6)

Segunda definição: função bilinear

DEFINIÇÃO 1.5 – TENSOR COMO FUNÇÃO BILINEAR

T é uma **função bilinear** $\mathbf{T} : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$: associa a cada par ordenado de vetores um número real, linearmente em cada argumento.

Esta definição não faz referência a nenhuma base. A independência de coordenadas é, portanto, consequência imediata da definição, e não um teorema a demonstrar. (Ruderman 2019, seq. 2.3)

Equivalência das duas definições

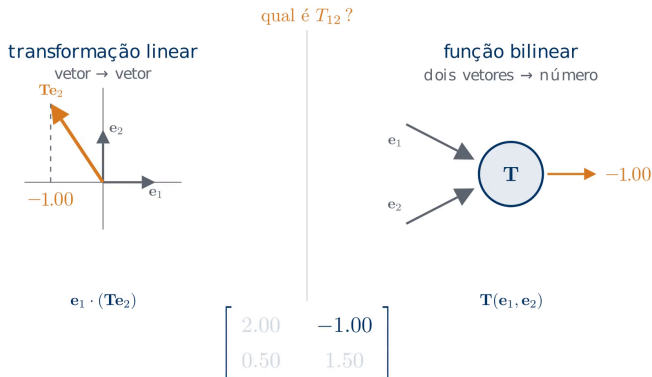
$$T_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j) \quad (\text{as duas definições dão a mesma matriz})$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) \quad (\text{relação entre as duas})$$

As duas definições produzem **o mesmo conjunto de nove componentes**. A equivalência é essa igualdade, e não exige demonstração adicional.

Os dois caminhos, lado a lado

Duas definições, o mesmo número



Animado na versão web — os dois caminhos convergindo.

Por que o curso usa duas notações

- A notação **direta** exhibe o objeto matemático, sem referência a base.
- A notação **indicial** exhibe as componentes em uma base, e é com elas que se calcula.

Nenhuma das duas é dispensável: a direta não fornece um algoritmo de cálculo; a indicial não exhibe a independência de coordenadas.

05 | Componentes

Componentes de um tensor

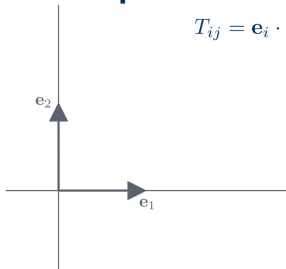
$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j \quad (\mathbf{T}\mathbf{v})_i = T_{ij}v_j \quad (\text{indicial})$$
$$[\mathbf{T}] \text{ com } \mathbf{T} \mathbf{e}_j \text{ na } j\text{-ésima coluna} \quad [\mathbf{T}\mathbf{v}] = [\mathbf{T}][\mathbf{v}] \quad (\text{matricial})$$

Na base **ortonormal** $\{\mathbf{e}_i\}$, a componente T_{ij} resulta de aplicar $\mathbf{T}$ ao vetor de base $\mathbf{e}_j$ e projetar o resultado sobre $\mathbf{e}_i$. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.7)

A matriz se preenche uma casa por vez

Componentes são medições

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j$$



$$\begin{bmatrix} 2.00 & -1.00 \\ 0.50 & 1.50 \end{bmatrix}$$

cada componente é uma medição do objeto contra a base

Animado na versão web — quadro final mostrado.

Quando cada notação é mais econômica

A notação matricial é mais econômica para $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, que se escreve em uma linha. O mesmo resultado em notação indicial exige acompanhar os índices:

$$[(\mathbf{AB})^T]_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = A_{jk} B_{ki} = (\mathbf{B}^T)_{ik} (\mathbf{A}^T)_{kj}$$

Quando cada notação é mais econômica

A notação matricial é mais econômica para $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$, que se escreve em uma linha. O mesmo resultado em notação indicial exige acompanhar os índices:

$$[(\mathbf{AB})^T]_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = A_{jk} B_{ki} = (\mathbf{B}^T)_{ik} (\mathbf{A}^T)_{kj}$$

A notação indicial é mais econômica quando os índices contraídos não são adjacentes.

EXERCÍCIO COMPLEMENTAR, NÃO AVALIADO

Escreva $A_{ij} B_{kj} C_{ik}$ em notação matricial. Resposta: $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{B}^T)$.

06 | Mudança de base

Tensores ortogonais

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij} \quad (\text{indicial})$$

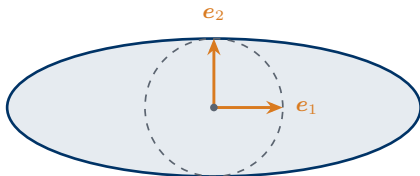
$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (\text{direta})$$

Demonstração de que $\det \mathbf{Q} = \pm 1$: $\det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det \mathbf{I} = 1$.

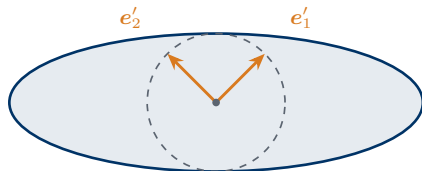
Um tensor e suas representações

um mesmo tensor $\mathbf{T}$, duas bases

representação na base $\{e_i\}$



representação na base $\{e'_i\}$



$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{mudança de base}]{[\mathbf{T}]' = \mathbf{Q}^T [\mathbf{T}] \mathbf{Q}} [\mathbf{T}]' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Animado na versão web — a base gira e a matriz acompanha.

A lei de transformação

Sejam $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_j\}$ duas bases **ortonormais**, relacionadas pelo tensor ortogonal $\mathbf{Q}$, com $\mathbf{e}'_j = Q_{mj}\mathbf{e}_m$, isto é, $Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$ (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 2.16–2.18).

$$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn} \quad (\text{indicial})$$

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{Q}] \quad (\text{matricial})$$

RESUMO

Um tensor é um objeto definido sem referência a base; sua matriz é a representação desse objeto em uma base. A lei de transformação relaciona as representações de um **mesmo** tensor em bases distintas.

07 | Fechamento

Exercícios propostos (integram a Lista 1, cuja divulgação segue o calendário):

- **PS1.1** — manipulações com ε_{ijk} e a identidade $\varepsilon-\delta$
- **PS1.2** — unicidade da decomposição $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{A}$, com $\mathbf{S}$ simétrico e $\mathbf{A}$ antissimétrico

Estudo complementar, não avaliado: Ruderman, problemas 2.1 a 2.6.

Antes do laboratório: instalar o miniforge, conforme instruções nas notas de aula.

Referências

Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Krempel. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.

Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.