

U1.T2 — Autovalores, invariantes e cálculo tensorial

MAE369 — Mecânica e Fenômenos de Transporte · IM/UFRJ · 2026/2

01 | Onde estamos

O que esta sessão acrescenta

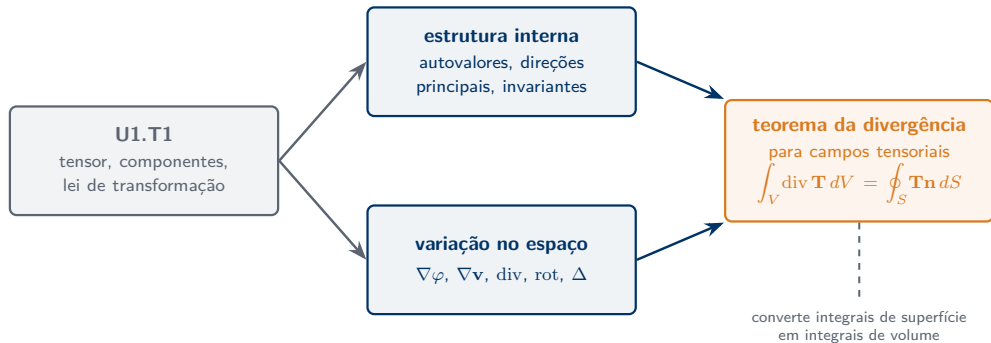


Figura 1

A questão de U1.T1 recebe metade da resposta

QUESTÃO EM ABERTO DESDE U1.T1

Por que a mecânica do contínuo precisa de todo esse formalismo tensorial?

Ao final desta sessão teremos **um** dos dois ingredientes do método: o teorema que converte integrais de superfície em integrais de volume.

O outro ingrediente chega em **U3.T1**. A questão permanece aberta até lá.

02 | Simétrico, antissimétrico, vetor dual

A decomposição

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \quad (\text{direta})$$

A primeira parcela é simétrica, a segunda é antissimétrica — verifica-se transpondo cada uma. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.20)

A decomposição

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \quad (\text{direta})$$

A primeira parcela é simétrica, a segunda é antissimétrica — verifica-se transpondo cada uma. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.20)

A **unicidade** da decomposição é o item (b) de **PS1.2**, proposto em U1.T1.

A contagem: nove, seis e três

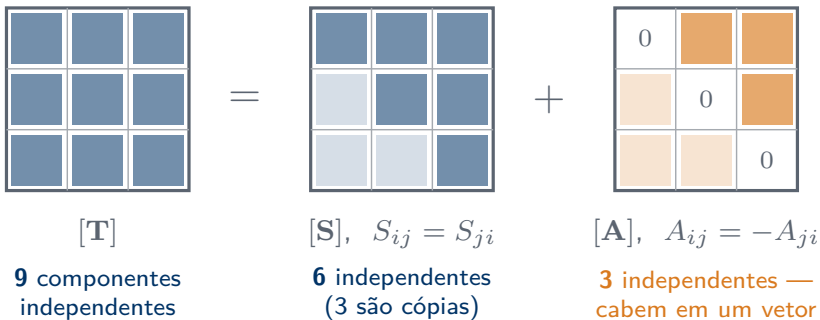


Figura 2

Três números independentes é exatamente o que um vetor tem.

O vetor dual

DEFINIÇÃO 1.8 – VETOR DUAL

Seja **W** antissimétrico. Seu **vetor dual w** satisfaz

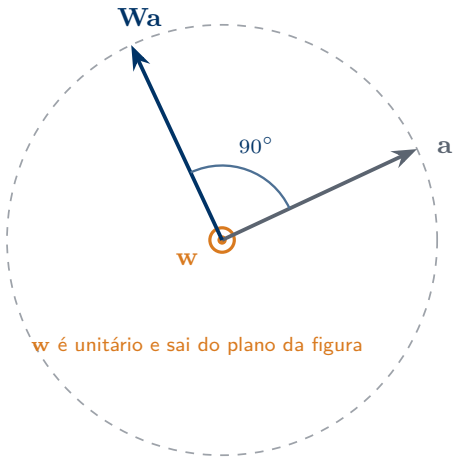
$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \quad \text{para todo } \mathbf{a}.$$

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k \qquad w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij} \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \qquad (\text{direta})$$

(Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.21)

O que o vetor dual faz



$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \text{ para todo } \mathbf{a}$$

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$$

$$w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij}$$

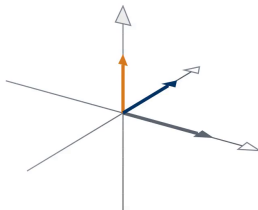
aqui $|\mathbf{W}\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ porque $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ e $|\mathbf{w}| = 1$

Figura 3

Para todo $\mathbf{a}$, e não só para um

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}, \text{ para todo } \mathbf{a}$$

$\mathbf{w}$
 $\mathbf{a}$
 $\mathbf{W}\mathbf{a}$



$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \qquad W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$$

três componentes de $\mathbf{W}$, guardadas em um vetor

Animado na versão web — quadro final mostrado.

03 | Autovalores, direções principais, invariantes

Autovalores e equação característica

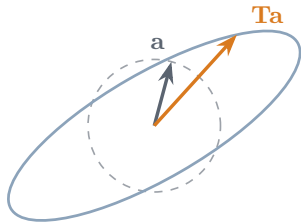
$$\begin{aligned} (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j &= 0 & \text{com} & & n_j n_j &= 1 & \text{(indicial)} \\ (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{com} & & \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= 1 & \text{(direta)} \end{aligned}$$

Sistema linear homogêneo: há solução não trivial exatamente quando

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

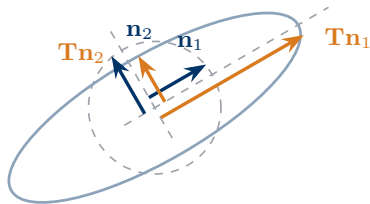
Uma cúbica em λ . Suas raízes são os autovalores. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.22)

O que distingue uma direção principal



direção qualquer

Ta não é paralelo a a : além de esticar, T gira



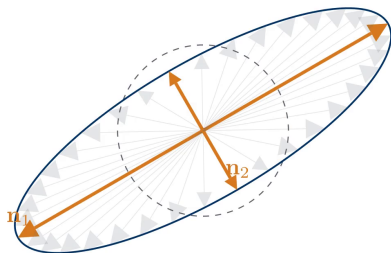
direções principais

a imagem é paralela ao vetor: só o comprimento muda, pelo fator λ

Figura 4

Só duas direções resistem

As direções que T não gira



$$T\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

as direções que T apenas alonga ou encurta

Animado na versão web — quadro final mostrado.

Tensores simétricos reais

RESULTADO 1.4 – TEOREMA ESPECTRAL

Se $\mathbf{T}$ é simétrico e real, então: **(i)** seus autovalores são reais; **(ii)** autovetores de autovalores distintos são ortogonais; **(iii)** existe ao menos um triedro de direções principais mutuamente ortogonais.

Demonstração de (ii). De $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$, com $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ os lados esquerdos coincidem, logo

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0.$$

Os invariantes principais

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (\text{igual nas duas notações})$$

$$I_1 = T_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}), \quad I_3 = \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} \quad (\text{indicial})$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{T}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)], \quad I_3 = \det \mathbf{T} \quad (\text{direta})$$

Por que “invariantes”: os autovalores são definidos sem referência a base alguma; logo os coeficientes do polinômio que os tem por raízes também não dependem dela. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.25)

As nove entradas correm; três números não

O que não muda quando a base muda



base girada de 37.0°

$$[\mathbf{T}]' = \begin{bmatrix} 4.60 & -0.20 & 1.00 \\ -0.20 & 2.40 & -2.00 \\ 1.00 & -2.00 & 2.00 \end{bmatrix}$$

I_1
9.000

I_2
20.000

I_3
2.000

a matriz muda; a equação característica, não

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

Animado na versão web — quadro final mostrado.

Exercício proposto: PS1.4

PS1.4 – OS INVARIANTES SOB MUDANÇA DE BASE

Partindo da lei de transformação $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$, obtida em U1.T1, mostre passo a passo que I_1 , I_2 e I_3 não mudam com a base. O último item pede uma verificação numérica com uma rotação qualquer.

Roteiro completo nas notas de aula, em cinco itens.

04 | Os operadores diferenciais

De objeto a campo

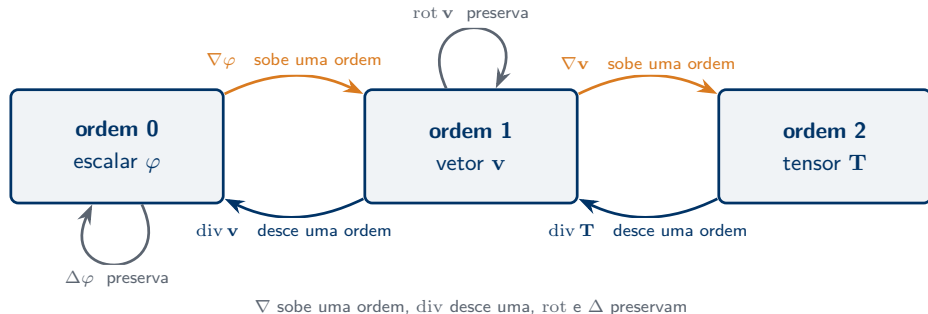


Figura 5

A partir daqui, cada ponto do espaço tem seu próprio escalar, vetor ou tensor.

As cinco definições

$$(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (\nabla\mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\nabla\varphi$$

$$\nabla\mathbf{v}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\nabla\mathbf{v}) \quad (\text{direta})$$

$$(\operatorname{div}\mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{T}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi \quad (\text{direta})$$

Duas convenções fixadas de uma vez por todas

CONVENÇÕES ADOTADAS EM TODO O CURSO

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (\operatorname{div} \mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Em $\nabla \mathbf{v}$, o primeiro índice é o da componente e o segundo o da derivada. Em $\operatorname{div} \mathbf{T}$, a contração é no **segundo** índice. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.28–2.29)

(Ruderman 2019, seq. 2.11) adota **as duas transpostas**. Para tensor simétrico as divergências coincidem; para tensor qualquer, não.

Duas identidades de trabalho

$$\frac{\partial(\varphi v_i)}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \quad (\text{direta})$$

$$\frac{\partial(T_{ij} v_i)}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{direta})$$

Uma advertência de notação, para depois

Todos os campos de hoje são **estáticos**: dependem de $\mathbf{x}$ e de mais nada.

Uma advertência de notação, para depois

Todos os campos de hoje são **estáticos**: dependem de $\mathbf{x}$ e de mais nada.

Quando o tempo entrar, em **U2.T1**, a derivada temporal de um campo espacial receberá símbolo próprio, D/Dt , e escrever d/dt para um campo espacial passará a ser erro de notação.

O operador não é definido hoje. O aviso fica registrado.

05 | O teorema da divergência

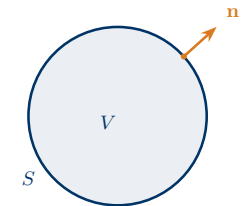
O caso vetorial, admitido do Cálculo

$$\int_V \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dV = \oint_S w_j n_j dS \quad (\text{indicial})$$

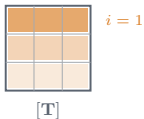
$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \oint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{direta})$$

V é um **volume regular** — limitado, com fronteira S suave por partes — e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a S .

A ideia da demonstração



um mesmo volume V , com fronteira S e normal exterior $\mathbf{n}$



1. Fixe i . A i -ésima linha, $w_j := T_{ij}$, é um campo vetorial comum.

2. Aplique a esse campo o teorema da divergência vetorial:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S T_{ij} n_j dS$$

3. Vale para $i = 1, 2, 3$; reempacote as três igualdades:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \mathbf{n} dS$$

Figura 6

Resultado 1.7

RESULTADO 1.7 – TEOREMA DA DIVERGÊNCIA PARA CAMPOS TENSORIAIS

Para um campo tensorial continuamente diferenciável em um volume regular V de fronteira S , com normal unitária exterior $\mathbf{n}$:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S T_{ij} n_j dS \quad (\text{indicial})$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \mathbf{n} dS \quad (\text{direta})$$

O que este resultado faz

Ele converte uma integral sobre uma **superfície fechada** em uma integral sobre o **volume** que ela limita.

O que este resultado faz

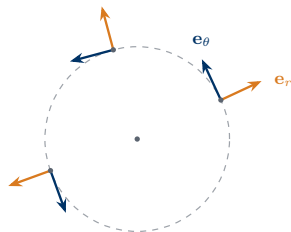
Ele converte uma integral sobre uma **superfície fechada** em uma integral sobre o **volume** que ela limita.

É **um** dos dois ingredientes do método pelo qual se obtêm as equações de campo da mecânica do contínuo.

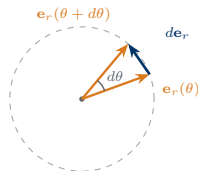
O outro é o **Teorema do Transporte (TTR)**, enunciado e demonstrado em **U3.T1**. Quando os dois forem usados juntos, a questão de U1.T1 é respondida.

06 | Coordenadas curvilíneas

Por que trocar de coordenadas



a base gira com o ponto
ortonormal em cada ponto, mas
não a mesma em pontos diferentes



a origem dos termos $1/r$
derivar um campo obriga
a derivar também a base

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$$

Figura 7

As bases continuam **ortonormais em cada ponto**, mas não são as mesmas em pontos diferentes.

A conta que gera todos os termos $1/r$

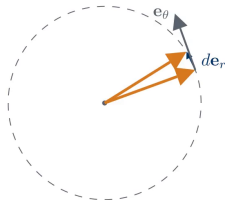
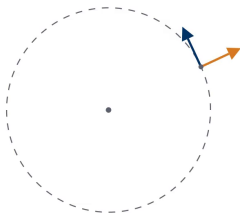
$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0}$$

Derivar um campo obriga a derivar também a base. Cada derivada de base acrescenta um termo. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seç. 2.33)

O limite, visto de perto

De onde vêm os termos $1/r$



$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$$

derivar um campo obriga a derivar também a base

Animado na versão web — quadro final mostrado.

O formulário

FORMULÁRIO – COORDENADAS CURVILÍNEAS

Cilíndricas e esféricas: $\nabla\varphi$, $\nabla\mathbf{v}$, $\text{div}\mathbf{v}$, $\text{rot}\mathbf{v}$, $\text{div}\mathbf{T}$, $\Delta\varphi$ – e $\Delta\mathbf{v}$ em cilíndricas.

Documento de consulta permanente, com o cabeçalho declarando as convenções.

A dedução completa está em (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.33–2.35), como leitura. O curso não a refaz linha a linha.

Exercício proposto: PS1.3

PS1.3 – DIVERGÊNCIA DE UM TENSOR EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Obter do zero a componente radial de $\text{div } \mathbf{T}$ em coordenadas cilíndricas, em cinco passos numerados, e **comparar o resultado com a linha correspondente do formulário.**

O passo final audita a tabela em vez de recebê-la pronta.

07 | Fechamento

Produzido hoje — a tabela de notação, encerrada na versão 1.0; o **Resultado 1.7**; o formulário de coordenadas curvilíneas.

Exercícios propostos: PS1.3 (curvilíneas) e PS1.4 (invariantes). Com PS1.1 e PS1.2, de U1.T1, a Lista 1 está completa.

Estudo complementar, não avaliado: Ruderman, problemas 2.10 a 2.19.

Antes do laboratório: miniforge instalado, conforme as notas de U1.T1.

Referências

Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Kreml. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.

Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.