

Formulário — coordenadas curvilíneas

Operadores diferenciais em coordenadas cilíndricas e esféricas · MAE369 · IM/UFRJ

Documento de consulta permanente. Reúne os operadores diferenciais em coordenadas cilíndricas e esféricas, na convenção adotada pelo curso. As deduções completas encontram-se em (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seções 2.33–2.35).

Convenções de que estas fórmulas dependem

Uma fórmula curvilínea só faz sentido junto das convenções sob as quais foi escrita. As quatro abaixo valem em todas as linhas deste formulário.

CONVENÇÕES ADOTADAS

- 1. Bases locais ortonormais.** Em cada ponto, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ (cilíndricas) e $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ (esféricas) formam uma base ortonormal positivamente orientada. Ela **muda de ponto para ponto**.
- 2. Ângulos.** Em coordenadas **cilíndricas** (r, θ, z) , θ é o ângulo azimutal, medido no plano x_1x_2 ; r é a distância ao eixo x_3 . Em coordenadas **esféricas** (r, θ, ϕ) , θ é medido **a partir do eixo** x_3 (colatitude) e ϕ é o ângulo azimutal; r é a distância à origem.
- 3. Ordem dos índices em $\nabla \mathbf{v}$.** $(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ — o primeiro índice é o da componente do campo, o segundo é o da derivada.
- 4. Índice contraído em $\text{div } \mathbf{T}$.** $(\text{div } \mathbf{T})_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$ — a contração é no **segundo** índice.

 O símbolo θ não significa a mesma coisa nos dois sistemas

Em cilíndricas, θ é o ângulo **azimutal**. Em esféricas, θ é a **colatitude**, medida a partir do eixo x_3 , e o azimutal é ϕ . Essa é a convenção de (Lai, Rubin, e Krempel 2010) e é a do curso, mas ela não é universal: há textos que trocam os nomes dos dois ângulos esféricos. Ao comparar com outra fonte, verifique primeiro qual ângulo é medido a partir do eixo.

Sobre a convenção 3 e a convenção 4: (Ruderman 2019, seq. 2.11) adota ambas transpostas. Para um tensor simétrico as duas versões de $\text{div } \mathbf{T}$ coincidem; para um tensor qualquer, não.

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

Derivadas dos vetores de base

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} = \mathbf{0},$$

e todas as derivadas em relação a r e a z são nulas. Todo termo com $1/r$ nas fórmulas seguintes provém destas três derivadas.

Gradiente de um campo escalar

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Gradiente de um campo vetorial

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Divergência de um campo vetorial

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotacional de um campo vetorial

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{v} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Divergência de um campo tensorial

$$\begin{aligned}(\text{div } \mathbf{T})_r &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ (\text{div } \mathbf{T})_\theta &= \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ (\text{div } \mathbf{T})_z &= \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}\end{aligned}$$

Laplaciano de um campo escalar

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Laplaciano de um campo vetorial

$$\begin{aligned}(\Delta \mathbf{v})_r &= \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ (\Delta \mathbf{v})_\theta &= \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ (\Delta \mathbf{v})_z &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Lembre-se: θ é medido a partir do eixo x_3 , e ϕ é o ângulo azimutal.

Gradiente de um campo escalar

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \mathbf{e}_\phi$$

Gradiente de um campo vetorial

$$[\nabla\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi \cot\theta}{r} \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} & \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Divergência de um campo vetorial

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Rotacional de um campo vetorial

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} = & \left(\frac{v_\phi \cot\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Divergência de um campo tensorial

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \mathbf{T})_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{r\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r} \\(\operatorname{div} \mathbf{T})_\theta &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\theta\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} \\&\quad + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cotg \theta}{r} \\(\operatorname{div} \mathbf{T})_\phi &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (T_{\phi\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} \\&\quad + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\theta} \cotg \theta}{r}\end{aligned}$$

Laplaciano de um campo escalar

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

i Laplaciano de um campo vetorial, em esféricas

A expressão de $\Delta \mathbf{v}$ em coordenadas esféricas é longa e não é utilizada em nenhuma sessão deste curso. Quando necessária, ela se obtém de

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{v}),$$

com as fórmulas acima, e está escrita por extenso em (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.35).

Procedência e verificação

Todas as fórmulas foram transcritas de (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.34–2.35) e reescritas nas convenções declaradas nas [convenções de que estas fórmulas dependem](#).

A linha de $(\operatorname{div} \mathbf{T})_r$ em coordenadas cilíndricas é obtida do zero no exercício **PS1.3** da Lista 1: o enunciado conduz a dedução em cinco passos e o passo final compara o resultado com a linha correspondente deste formulário.

Referências

- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Krempel. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4^o ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.