

U1.T1 — Notação indicial e álgebra tensorial

Sessão U1.T1 · data: ver calendar-map

[Slides](#) [Slides PDF](#) [Notas PDF](#)

Esta primeira sessão tem dois objetivos. O primeiro é estabelecer a notação empregada durante todo o curso. O segundo é formular uma questão — *por que a mecânica do contínuo precisa de todo esse formalismo tensorial?* — que permanecerá em aberto até a Unidade 3.

A notação é dupla: cada resultado em destaque é escrito na forma **indicial**, seguindo (Lai, Rubin, e Krempel 2010), e na forma **direta ou matricial**, seguindo (Ruderman 2019). Ao final desta sessão você deve ser capaz de justificar por que nenhuma das duas formas é dispensável.

i Sobre o teorema mencionado nesta sessão

As leis de balanço da mecânica do contínuo são todas obtidas por um mesmo método: escreve-se um balanço integral sobre um volume material, aplica-se o **Teorema do Transporte** e o teorema da divergência, e localiza-se o resultado para obter uma equação diferencial. Esse teorema é enunciado e demonstrado em U3.T1. Até lá, as Unidades 1 e 2 constroem a linguagem matemática que ele exige.



Figura 1: O método pelo qual as equações de campo da mecânica do contínuo são obtidas. A etapa central é o único elemento não construído nesta unidade.

A convenção de soma e a consistência dos índices

A regra

DEFINIÇÃO 1.1 – CONVENÇÃO DE SOMA (EINSTEIN)

Em um monômio, um índice **repetido** indica soma sobre $\{1, 2, 3\}$:

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Índices latinos i, j, k, m, n percorrem sempre $\{1, 2, 3\}$.

$$s = a_i b_i \quad (\text{indicial})$$

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{direta})$$

Índices livres e índices mudos

Um índice que aparece **duas vezes** em um termo é dito **mudo**: ele está sendo somado, e a letra que o representa é arbitrária — $a_i b_i$ e $a_m b_m$ denotam o mesmo número. Um índice que aparece **uma única vez** é dito **livre**; neste caso a letra não é arbitrária, pois deve ser a mesma em todos os termos da equação, e a equação representa três equações escalares.

Três regras de consistência decorrem disso.

1. **Um índice mudo aparece exatamente duas vezes em cada termo.** Três ocorrências não estão definidas na convenção: $a_i b_i x_i$ não é uma expressão válida. Se essa soma for necessária, o símbolo $\sum$ deve ser reintroduzido explicitamente.
2. **Um índice livre aparece em todos os termos, sempre representado pela mesma letra.** A equação $a_i + b_i = c_i$ é válida; $a_i = b_j$ não é.
3. **Um índice mudo pode ser renomeado; um índice livre não.**

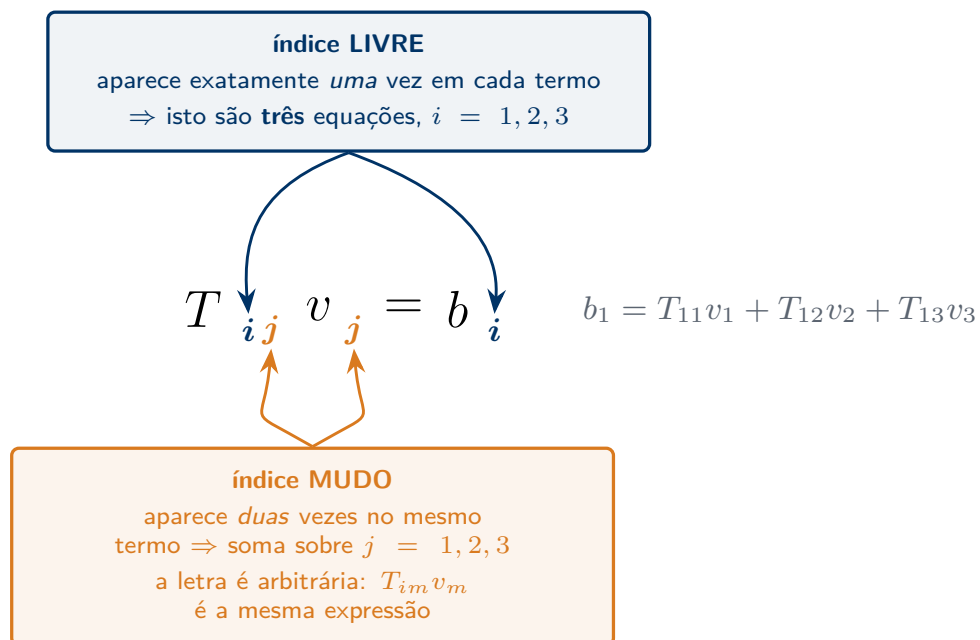


Figura 2: Estrutura da expressão $T_{ij}v_j = b_i$. O índice livre determina quantas equações escalares a expressão representa; o índice mudo indica a soma.

Com índice livre, não

$$a_i = b_i$$

$$a_m = b_m$$

trocar dos dois lados: válido

$$a_m = b_i$$

trocar de um lado só: inválido

índice mudo pode ser renomeado; índice livre, não

Animado na versão web — a expansão permanece imóvel enquanto a letra do índice muda.

A terceira regra é a que mais frequentemente evita erros em derivações. Quando duas expres-

sões são combinadas e uma mesma letra ocorre em ambas por coincidência, é necessário renomear um dos índices **antes** da substituição. Esse é o procedimento descrito em (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.5), e sua omissão é uma fonte recorrente de erro.

EXEMPLO – RENOMEAÇÃO PRÉVIA À SUBSTITUIÇÃO

Sejam $a_i = U_{im}b_m$ e $b_i = V_{im}c_m$. Para substituir a segunda expressão na primeira, reescreve-se a segunda com índices que não colidam: $b_m = V_{mn}c_n$. Obtém-se então

$$a_i = U_{im}V_{mn}c_n.$$

A substituição sem renomeação prévia produziria três ocorrências de m — expressão inválida.

O delta de Kronecker

DEFINIÇÃO 1.2 – DELTA DE KRONECKER

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Em uma base ortonormal, $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.3)

O delta de Kronecker atua como **operador de substituição de índice**, e é sob essa forma que ele aparece na maioria das derivações do curso.

$$\begin{array}{lll} \delta_{ij}a_j = a_i & \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} & \delta_{ii} = 3 \quad (\text{indicial}) \\ \mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a} & \mathbf{I}\mathbf{I} = \mathbf{I} & \text{tr } \mathbf{I} = 3 \quad (\text{direta}) \end{array}$$

 $\delta_{ii} = 3$

O índice está repetido e, portanto, somado: $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$. Escrever $\delta_{ii} = 1$ é um erro frequente.

Convenção: bases ortonormais

CONVENÇÃO ADOTADA EM TODO O CURSO

Salvo menção explícita em contrário, toda base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ utilizada neste curso é **ortonormal**:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Esta hipótese não é um detalhe: ela é o que sustenta praticamente tudo o que se segue. É por ser a base ortonormal que se pode

- identificar as componentes de um vetor com projeções, $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$;
- obter as componentes de um tensor por projeção, $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j$;
- descrever a mudança de base por um tensor **ortogonal** $\mathbf{Q}$, e escrever a lei de transformação na forma $[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]$.

Em uma base oblíqua nenhuma dessas simplificações vale: seria necessário distinguir componentes covariantes de contravariantes, e introduzir um tensor métrico para subir e descer índices. A mecânica do contínuo em coordenadas cartesianas dispensa esse aparato, e este curso o dispensa também — mas convém saber que a dispensa é uma escolha, e não uma verdade geral sobre tensores.

i Ortonormal não significa constante

As bases ortonormais desta sessão são fixas: os mesmos três vetores em todo ponto do espaço. Em U1.T2 aparecerão bases que continuam ortonormais em cada ponto, mas cuja orientação **muda de ponto para ponto**. As duas propriedades são independentes, e é a ortonormalidade — não a constância — que as fórmulas acima exigem.

O símbolo de permutação e a identidade $\varepsilon - \delta$

Definição e antissimetria

DEFINIÇÃO 1.3 – SÍMBOLO DE PERMUTAÇÃO

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ permutação par de } (1, 2, 3) \\ -1, & (i, j, k) \text{ permutação ímpar de } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{dois ou mais índices iguais} \end{cases}$$

(Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.4)

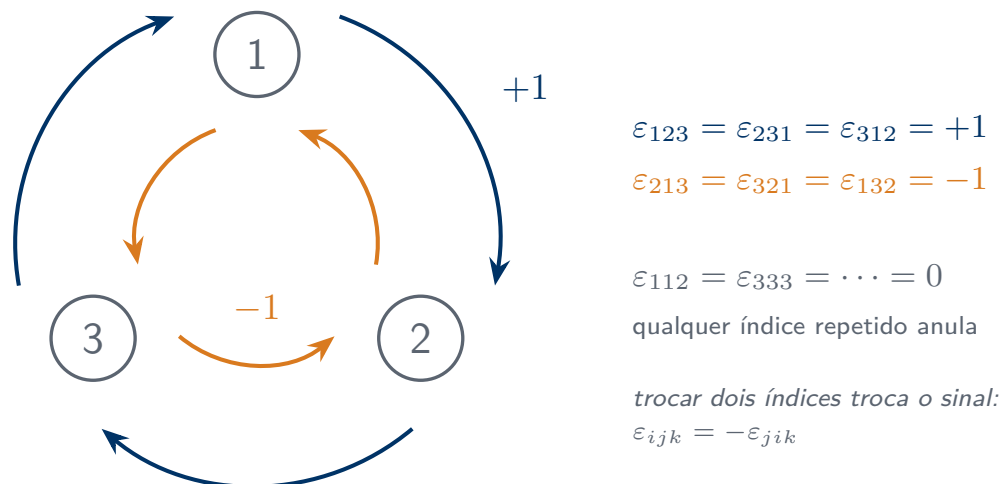


Figura 3: Permutações cíclicas de $(1, 2, 3)$ correspondem a $+1$; anticíclicas, a -1 ; índices repetidos anulam o símbolo.

O símbolo é **totalmente antissimétrico**: a troca de qualquer par de índices inverte o sinal, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$. Uma consequência de uso frequente: se S_{jk} é simétrico, isto é, $S_{jk} = S_{kj}$, então $\varepsilon_{ijk}S_{jk} = 0$.

Produto vetorial e determinante

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{direta})$$

E, para o determinante,

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \iff \det[\mathbf{A}].$$

Nestes dois casos a notação direta apenas **nomeia** a operação; o cálculo efetivo das componentes é feito na forma indicial. As duas notações não são, portanto, intercambiáveis. Na seção seguinte encontraremos a situação inversa, em que a notação direta é mais econômica. É essa alternância que justifica manter as duas.

A identidade ε - δ

RESULTADO 1.1 – IDENTIDADE E- Δ

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Esta identidade converte qualquer produto de dois símbolos de permutação em uma combinação de deltas e, conseqüentemente, qualquer produto vetorial duplo em produtos escalares. Ela é utilizada em U1.T2, no estudo do vetor dual e do rotacional, e em U5.T2, nas identidades de vorticidade.

Demonstração. Os quatro casos a seguir esgotam todas as escolhas possíveis de (j, k, m, n) .

Caso	Hipótese	$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}$	$\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$
1	$j = k$ ou $m = n$	0	0
2	$j \neq k$ e $(m, n) = (j, k)$	+1	+1
3	$j \neq k$ e $(m, n) = (k, j)$	-1	-1
4	$j \neq k, m \neq n$ e $\{m, n\} \neq \{j, k\}$	0	0

Caso 1. Se $j = k$, então $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijj} = 0$ para todo i , e o lado esquerdo se anula. No lado direito, $\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} = 0$. O argumento para $m = n$ é análogo.

Caso 2. Com j e k fixos e distintos, existe um único valor de i para o qual $\varepsilon_{ijk} \neq 0$, a saber, o índice que não pertence a $\{j, k\}$. Para esse valor, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = (\pm 1)^2 = 1$. No lado direito, $\delta_{jj} \delta_{kk} - \delta_{jk} \delta_{kj} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

Os casos 3 e 4 constituem o item (a) do exercício PS1.1. O caso 4 é o mais instrutivo: para que $\varepsilon_{ijk} \neq 0$ é necessário que $i \notin \{j, k\}$, e para que $\varepsilon_{imn} \neq 0$ é necessário que $i \notin \{m, n\}$; como $\{j, k\}$ e $\{m, n\}$ são subconjuntos distintos de dois elementos de $\{1, 2, 3\}$, sua união é o conjunto inteiro, de modo que nenhum valor de i satisfaz ambas as condições. ■

i Forma equivalente em [@lai2010]

O livro enuncia a identidade contraindo o **último** índice (eq. 2.4.7): $\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$. Trata-se da mesma identidade, com outra escolha de letras. A forma adotada no curso é a do Resultado 1.1, para a qual estão escritos os corolários do item (b) do PS1.1.

As duas definições de tensor

Um tensor de segunda ordem admite duas definições equivalentes. Ambas são apresentadas aqui, uma única vez, porque cada uma torna evidente um aspecto que a outra deixa implícito.

DEFINIÇÃO 1.4 – TENSOR COMO TRANSFORMAÇÃO LINEAR

$\mathbf{T}$ é um **tensor de segunda ordem** se associa a cada vetor um vetor, de modo linear:

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{T}\mathbf{a} + \beta \mathbf{T}\mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \forall \alpha, \beta.$$

(Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.6)

Esta é a definição empregada nos cálculos ao longo do curso. Exemplos imediatos: o tensor identidade, uma projeção ortogonal e uma rotação de corpo rígido.

EXEMPLO – UMA TRANSFORMAÇÃO QUE NÃO É TENSOR

Seja $\mathbf{T}$ a transformação que associa a todo vetor um mesmo vetor fixo $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Então $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{n}$ e $\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{n}$, mas $\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{n} \neq \mathbf{n} + \mathbf{n}$. A transformação não é linear e, portanto, não é um tensor. Adaptado de (Lai, Rubin, e Kreml 2010, Ex. 2.6.1).

DEFINIÇÃO 1.5 – TENSOR COMO FUNÇÃO BILINEAR

$\mathbf{T}$ é uma **função bilinear** $\mathbf{T} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, associa a cada par ordenado de vetores um número real, linearmente em cada argumento. (Ruderman 2019, seq. 2.3)

O interesse desta segunda definição é que ela não faz referência a base alguma. Um tensor, assim definido, é desde o início um objeto independente do sistema de coordenadas: a invariância não precisa ser demonstrada, pois não há coordenadas na definição.

Equivalência

$$T_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j) \quad (\text{as duas definições dão a mesma matriz})$$

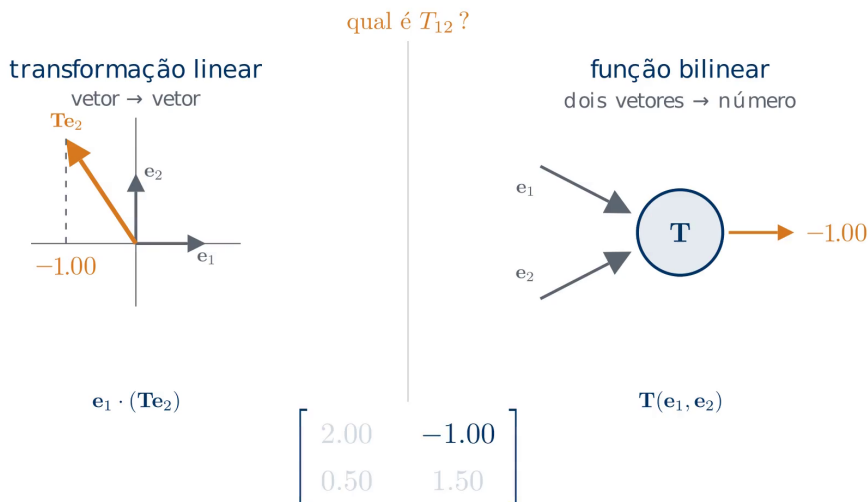
$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) \quad (\text{relação entre as duas})$$

(Ruderman 2019) define as componentes por $T_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, enquanto (Lai, Rubin, e Kreml 2010) as define por $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$. As duas definições produzem o mesmo conjunto de nove componentes, e é nisso que consiste a equivalência.

Em componentes, a relação verifica-se em uma linha:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = T_{ij}u_i v_j = u_i (T_{ij}v_j) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}).$$

Duas definições, o mesmo número



Animado na versão web — quadro do momento em que os dois caminhos convergem para a mesma casa da matriz.

! Convenção do curso (L1 §4.7)

A partir deste ponto as duas definições são tratadas como equivalentes, sem rediscussão. A definição empregada nos cálculos é a de (Lai, Rubin, e Krempel 2010): um tensor é uma transformação linear, e os cálculos são feitos com suas componentes.

Por que o curso emprega duas notações

A notação **direta** exhibe o objeto matemático sem referência a base; a notação **indicial** exhibe as componentes em uma base, e é com elas que se calcula. Nenhuma das duas é dispensável: a primeira não fornece um algoritmo de cálculo, e a segunda não exhibe a independência de coordenadas.

Componentes, transposto e mudança de base

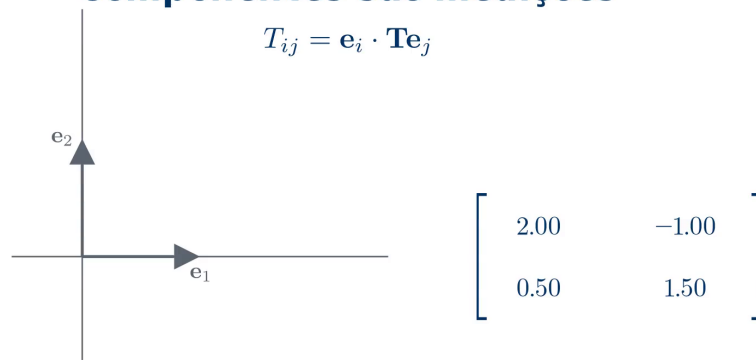
Componentes

$$\begin{array}{ll} T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j & (\mathbf{T}\mathbf{v})_i = T_{ij}v_j \quad (\text{indicial}) \\ [\mathbf{T}] \text{ com } \mathbf{T}\mathbf{e}_j \text{ na } j\text{-ésima coluna} & [\mathbf{T}\mathbf{v}] = [\mathbf{T}][\mathbf{v}] \quad (\text{matricial}) \end{array}$$

Na base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ — conforme a convenção fixada acima —, a componente T_{ij} obtém-se aplicando $\mathbf{T}$ ao vetor de base $\mathbf{e}_j$ e projetando o resultado sobre $\mathbf{e}_i$.

A convenção segundo a qual as componentes de $\mathbf{T}\mathbf{e}_j$ formam a j -ésima coluna da matriz não é arbitrária: é ela que faz corresponder a equação tensorial $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ à equação matricial $[\mathbf{b}] = [\mathbf{T}][\mathbf{a}]$, sem transposto adicional. Com a convenção oposta obter-se-ia $[\mathbf{b}] = [\mathbf{T}]^T[\mathbf{a}]$ (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 2.8).

Componentes são medições



cada componente é uma medição do objeto contra a base

Animado na versão web — cada componente é obtida por uma medição, e a coluna j se completa como $\mathbf{T}\mathbf{e}_j$.

Transposto

DEFINIÇÃO 1.6 – TRANSPOSTO

$\mathbf{T}^\top$ é o tensor que satisfaz, para todos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{T}^\top \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{T}^\top)_{ij} = T_{ji}.$$

Segue daí que $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$ (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 2.11).

Economia relativa das duas notações

A notação matricial é mais econômica para $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$, que se escreve em uma linha. O mesmo resultado em notação indicial exige acompanhar os índices:

$$[(\mathbf{AB})^\top]_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = A_{jk} B_{ki} = (\mathbf{B}^\top)_{ik} (\mathbf{A}^\top)_{kj} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top)_{ij}.$$

A notação indicial é mais econômica em expressões com ε_{ijk} e sempre que os índices contraídos não são adjacentes, situação em que a forma matricial exige a introdução de transpostos para aproximá-los.

EXERCÍCIO COMPLEMENTAR, NÃO AVALIADO

Escreva $A_{ij} B_{kj} C_{ik}$ em notação matricial.

Resposta: $\text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{C} \mathbf{B}^\top)$. Compare o esforço de obter essa forma com o de escrever a expressão indicial correspondente.

Tensores ortogonais

$$Q_{im} Q_{jm} = Q_{mi} Q_{mj} = \delta_{ij} \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top \quad (\text{direta})$$

Um tensor ortogonal preserva comprimentos e ângulos: $\mathbf{Q}\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 2.15).

RESULTADO 1.2 – DETERMINANTE DE UM TENSOR ORTOGONAL

De $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ segue $(\det \mathbf{Q})(\det \mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 = 1$, e portanto

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

A demonstração ocupa uma linha na notação direta. Na notação indicial ela é consideravelmente mais trabalhosa, o que fornece mais um exemplo de resultado melhor tratado na forma direta.

A lei de transformação

Sejam $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$ duas bases ortonormais, relacionadas pelo tensor ortogonal $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i = Q_{mi} \mathbf{e}_m, \quad \text{isto é,} \quad Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j.$$

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \quad (\text{indicial})$$

$$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}] \quad (\text{matricial})$$

! Convenção fixada uma única vez para todo o curso

$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$, conforme (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.16–2.18). Nenhuma sessão posterior redefine ou rededuz esta convenção; todas remetem a esta seção e à tabela de notação.

um mesmo tensor T , duas bases

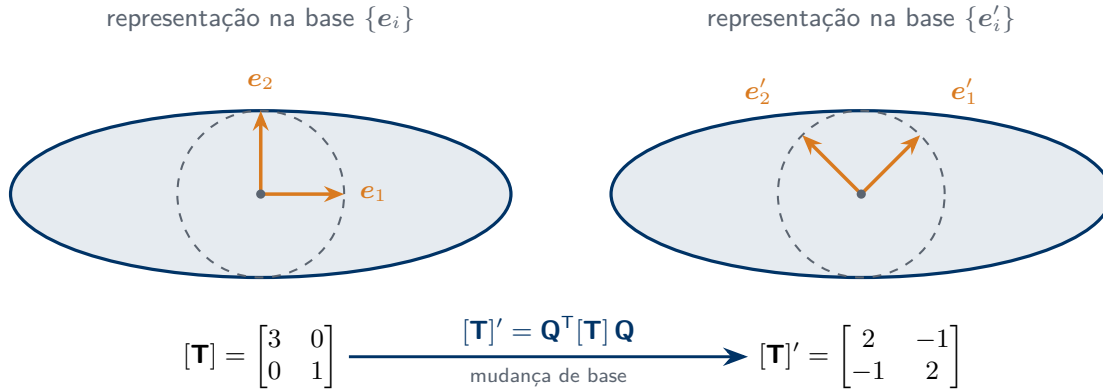
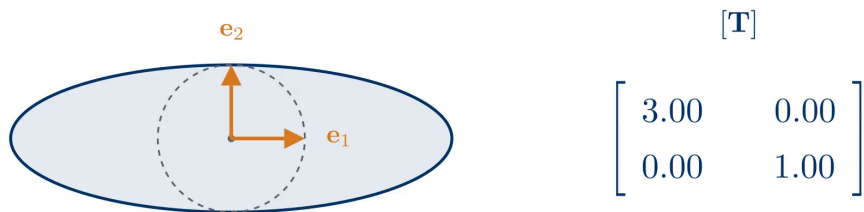


Figura 4: Um mesmo tensor representado em duas bases ortonormais distintas. Em cada painel o objeto desenhado é o círculo unitário (tracejado) e sua imagem por T (azul); a única diferença entre os painéis é a base escolhida.

Um tensor e suas representações



Um tensor é um objeto independente de base.
Sua matriz é a representação nessa base.
A lei de transformação relaciona representações
de um mesmo tensor.

Animado na versão web — a base gira continuamente e a matriz acompanha; o objeto não se move.

Um tensor é um objeto definido sem referência a base. Sua matriz é a representação desse objeto em uma base particular. A lei de transformação relaciona as representações de um mesmo tensor em bases distintas — o objeto permanece o mesmo, e apenas suas componentes mudam.

 Duas expressões semelhantes com significados distintos

$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]$ relaciona **duas matrizes de um mesmo tensor** $\mathbf{T}$, em bases distintas.
 $\mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$ relaciona **dois tensores distintos**, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$, na mesma base.
 A distinção é feita em (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.18).

Tabela de notação — versão 0.1

A tabela abaixo reúne as correspondências estabelecidas nesta sessão, na ordem em que foram obtidas. Ela é ampliada em U1.T2 com as operações de cálculo tensorial e é encerrada ao fim da Unidade 1.

A versão final e completa da tabela — versão 1.0, com as linhas de estrutura interna e de cálculo tensorial — está na [tabela de notação das notas de U1.T2](#). A tabela abaixo é a versão 0.1, e é preliminar.

indicial	direta / matricial	observação
$a_i b_i$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	
$T_{ij} v_j$	$\mathbf{T} \mathbf{v}$	coluna j = comps. de $\mathbf{T} \mathbf{e}_j$
$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$	$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$	
$A_{ij} B_{ij}$	$\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$	indicial mais econômica
T_{ii}	$\text{tr } \mathbf{T}$	
$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$	base ortonormal	convenção do curso
δ_{ij}	$\mathbf{I}$	substituí índice; $\delta_{ii} = 3$
$(\mathbf{T}^T)_{ij} = T_{ji}$	$\mathbf{T}^T$	Definição 1.6
$A_{jk} B_{ki}$	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$	matricial mais econômica
$\varepsilon_{ijk} a_j b_k$	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i$	
$\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$	$\det[\mathbf{A}]$	a forma direta apenas nomeia
$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}$	—	Resultado 1.1; sem forma direta
$A_{ij} B_{kj} C_{ik}$	$\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{B}^T)$	contração não adjacente
$Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$	$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$	$\det \mathbf{Q} = \pm 1$
$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$	$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]$	convenção fixada em §5.4

 Duas observações sobre as referências

Esta tabela não é a tabela de correspondência com Bird, Stewart & Lightfoot. Ela relaciona as duas notações adotadas no curso. A partir de U4.T1 haverá uma segunda tabela, destinada à correspondência com a convenção de sinais empregada naquele

texto — documentos distintos, com finalidades distintas.

(Ruderman 2019, seq. 2.6) adota a matriz transposta da de (Lai, Rubin, e Kreml 2010).

Aquele texto define $a_{ij} = e'_i \cdot e_j$, que é a transposta de Q_{ij} . As leis de transformação nos dois livros são equivalentes, mas a combinação das duas convenções em um mesmo cálculo produz um resultado transposto. **O curso adota a convenção de (Lai, Rubin, e Kreml 2010).**

Exercícios propostos

Os dois exercícios abaixo integram a **Lista 1**, cuja divulgação segue o calendário da disciplina.

PS1.1 – MANIPULAÇÕES INDICIAIS (DERIVAÇÃO GUIADA)

(a) Verifique os casos 3 e 4 da demonstração do Resultado 1.1, apresentados na [tabela daquela demonstração](#). Justifique, em cada caso, por que ambos os lados assumem o valor indicado.

(b) Usando o resultado de (a), mostre que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Sugestão: faça $m = j$ no Resultado 1.1 e some sobre j ; em seguida repita a operação sobre a expressão obtida.

(c) Usando o Resultado 1.1, e não argumentos geométricos, mostre que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Sugestão: escreva o lado esquerdo em componentes, com dois símbolos de permutação; aplique o Resultado 1.1; use os deltas resultantes para substituir índices.

PS1.2 – UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

Um tensor S é **simétrico** se $S^T = S$, e A é **antissimétrico** se $A^T = -A$.

(a) Mostre que todo tensor T admite a decomposição $T = S + A$, com S simétrico e A antissimétrico. *Sugestão:* some e subtraia $\frac{1}{2}T^T$.

(b) Mostre que essa decomposição é única. *Sugestão:* suponha $S_1 + A_1 = S_2 + A_2$, transponha a igualdade e combine as duas expressões.

(c) Escreva S e A em componentes. Quantas componentes independentes possui cada um?

Este exercício utiliza apenas o transposto e a linearidade, introduzidos nesta sessão.

Estudo complementar, não avaliado. (Ruderman 2019), problemas 2.1 a 2.6. As soluções

completas encontram-se no próprio livro (Apêndice A, §A.2); por essa razão, tais problemas são indicados como estudo dirigido e não como exercícios avaliados.

Apêndice — instalação do miniforge

O laboratório da Unidade 1 pressupõe o ambiente computacional já instalado. O ambiente completo, com as versões fixadas, é distribuído no próprio laboratório; esta etapa prévia consiste apenas em instalar o gerenciador.

INSTALAÇÃO DO MINIFORGE

1. Obtenha o instalador correspondente ao seu sistema operacional em <https://github.com/conda-forge/miniforge#download> (Windows: arquivo .exe; macOS e Linux: arquivo .sh).
2. Execute a instalação aceitando as opções padrão. No Windows, não marque a opção de adicionar ao PATH; utilize o *Miniforge Prompt* criado pelo instalador.
3. Abra um novo terminal – ou o *Miniforge Prompt* – e verifique a instalação:

```
conda --version
```

A impressão de um número de versão indica que a instalação foi bem-sucedida. O miniforge instala também o comando mamba, que resolve dependências mais depressa e aceita os mesmos argumentos; o laboratório usa conda nos roteiros, e os dois produzem o mesmo resultado.

Caso a verificação falhe, registre a mensagem de erro e traga-a para o laboratório, no qual há tempo reservado para a resolução desses problemas. A causa mais frequente de falha, em Windows, é a sincronização da pasta do usuário pelo OneDrive; a instalação em C:\miniforge3 resolve o problema.

Referências

- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Krempel. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4^o ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.