

U1.T2 — Autovalores, invariantes e cálculo tensorial

Sessão U1.T2 · data: ver calendar-map

[Slides](#) [Slides PDF](#) [Notas PDF](#)

Esta sessão encerra a Unidade 1. Ela acrescenta duas coisas de naturezas distintas ao que U1.T1 estabeleceu. A primeira é a **estrutura interna** de um tensor: autovalores, direções principais e invariantes — quantidades que o tensor possui antes de qualquer escolha de base. A segunda é a **variação no espaço**: os operadores diferenciais com que todas as equações do curso serão escritas. Ao final aparece o primeiro teorema de integração da disciplina, que converte uma integral sobre uma superfície fechada em uma integral sobre o volume que ela limita.

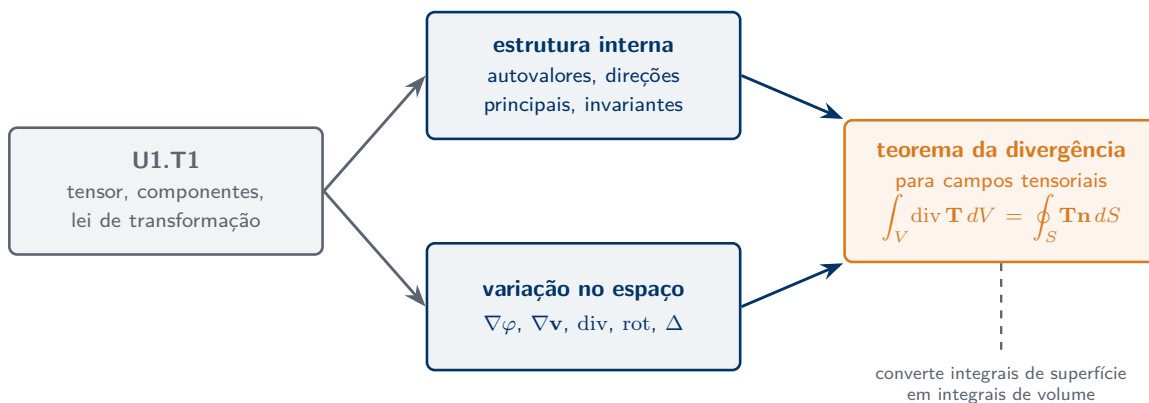


Figura 1: Os dois acréscimos desta sessão e o teorema em que eles confluem.

A tabela de notação inaugurada em U1.T1 recebe aqui suas últimas linhas e é encerrada na versão 1.0, na seção [Tabela de notação](#).

Tensores simétricos e antissimétricos

A decomposição

DEFINIÇÃO 1.7 – TENSOR SIMÉTRICO E TENSOR ANTISSIMÉTRICO

Um tensor S é **simétrico** se $S^T = S$, e um tensor A é **antissimétrico** se $A^T = -A$. Em componentes,

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad A_{ij} = -A_{ji}.$$

Da segunda condição com $i = j$ segue $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$: a diagonal de um tensor antissimétrico é nula. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.20)

Todo tensor se escreve, de maneira única, como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico. A existência ocupa uma linha; a unicidade é o exercício PS1.2, proposto em U1.T1.

RESULTADO 1.3 – DECOMPOSIÇÃO SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

Para todo tensor T ,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{A_{ij}} \quad (\text{indicial}) \\ \mathbf{T} &= \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)}_S + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)}_A \quad (\text{direta}) \end{aligned}$$

Verificação. Que a soma reproduz T é imediato. Que a primeira parcela é simétrica e a segunda antissimétrica verifica-se transpondo cada uma: $\left(\frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)\right)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^T + \mathbf{T})$, que é ela própria, e $\left(\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)\right)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^T - \mathbf{T})$, que é seu oposto. ■

A **unicidade** da decomposição é o item (b) do exercício PS1.2, proposto na sessão anterior. Ela não é demonstrada aqui, e o restante desta seção depende dela: quando se fala em “a parte antissimétrica de T ”, é a unicidade que garante que o artigo definido é legítimo.

A contagem de componentes independentes

Um tensor simétrico tem 6 componentes independentes: as três da diagonal e as três acima dela, pois as três abaixo são cópias. Um tensor antissimétrico tem apenas 3: a diagonal é

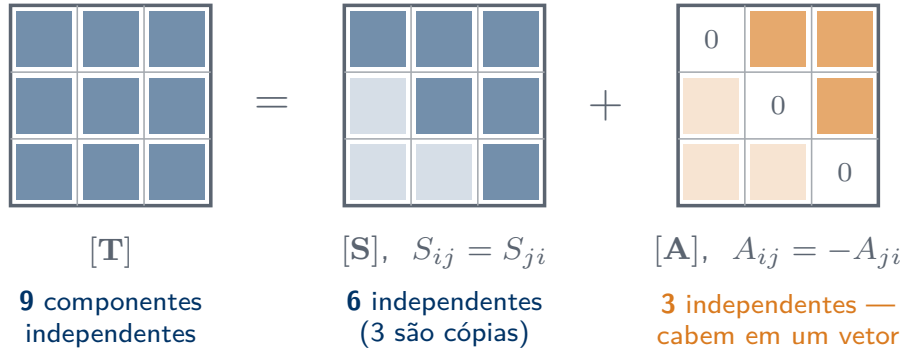


Figura 2: Das nove componentes de T , seis sobrevivem em S e três em A . As células claras são determinadas pelas escuras.

nula e as três componentes abaixo da diagonal são as de cima com o sinal trocado.

Três números é exatamente o que um vetor tem. A próxima subseção mostra que essa coincidência não é acidental.

O vetor dual de um tensor antissimétrico

DEFINIÇÃO 1.8 – VETOR DUAL

Seja W antissimétrico. O **vetor dual** de W é o vetor w que satisfaz

$$W\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \quad \text{para todo vetor } \mathbf{a}.$$

Ele também é chamado de **vetor axial** de W . (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.21)

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k \quad \text{e} \quad w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij} \quad (\text{indicial})$$

$$W\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \quad (\text{direta})$$

Obtenção da primeira relação. Aplique a definição ao vetor de base $\mathbf{e}_j$ e projete sobre $\mathbf{e}_i$:

$$W_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot W\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{ipq} w_p (\mathbf{e}_j)_q = \varepsilon_{ipj} w_p = -\varepsilon_{ijp} w_p,$$

em que a última igualdade usa a antissimetria de ε na troca dos dois últimos índices.

Inversão. Multiplique $W_{ij} = -\varepsilon_{ijm} w_m$ por $-\frac{1}{2} \varepsilon_{kij}$ e some:

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{ijm} w_m = \frac{1}{2} (2 \delta_{km}) w_m = w_k,$$

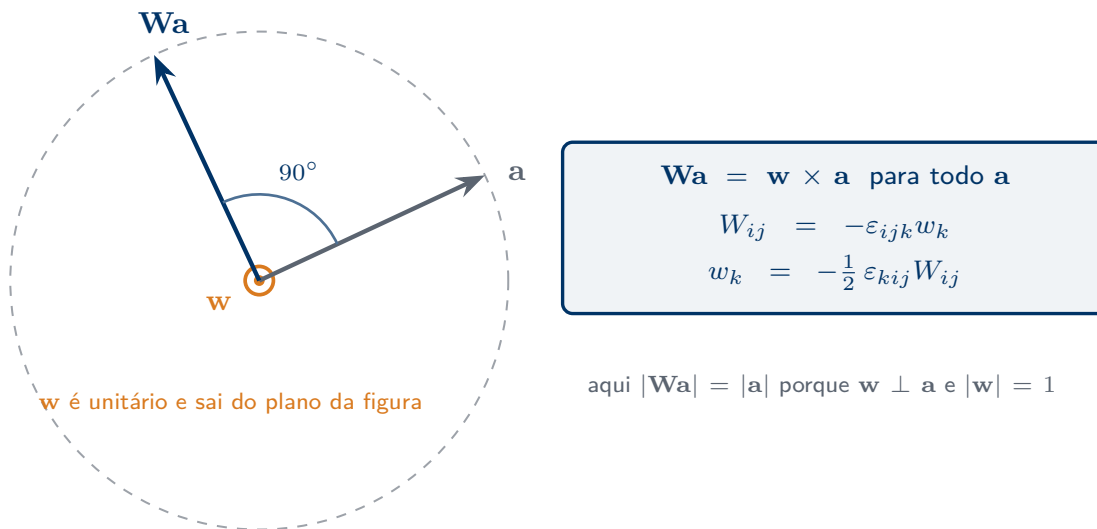


Figura 3: Com $\mathbf{w}$ unitário e perpendicular a $\mathbf{a}$, a ação de $\mathbf{W}$ é uma rotação de 90° que preserva o comprimento. As duas pontas caem sobre o mesmo círculo.

em que o passo do meio é o resultado $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{mij} = 2\delta_{km}$, obtido da identidade $\varepsilon-\delta$ no item (b) do exercício PS1.1. ■

i Por que este par reaparece

O par $(\mathbf{W}, \mathbf{w})$ volta em **U2.T2**, onde $\mathbf{W}$ e $\mathbf{w}$ recebem interpretação cinemática. Aqui eles são objetos puramente algébricos: um tensor antissimétrico qualquer e o vetor que o representa. A fórmula $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$ e sua inversão são o que aquela sessão vai utilizar.

O símbolo ω está **reservado** e não designa o vetor dual. A relação entre os dois símbolos é estabelecida em U2.T2.

Autovalores e direções principais

Definição e equação característica

DEFINIÇÃO 1.9 – AUTOVALOR E AUTOVETOR

Um vetor $\mathbf{n} \neq 0$ é **autovetor** de $\mathbf{T}$, com **autovalor** λ , se

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}.$$

Autovetores são tomados unitários, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$; isso fixa a única ambiguidade que restaria, a do comprimento. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.22)

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (\text{indicial})$$

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (\text{direta})$$

Trata-se de um sistema linear homogêneo nas três componentes de $\mathbf{n}$. Ele admite solução não trivial exatamente quando o determinante dos coeficientes se anula:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Esta é a **equação característica** de $\mathbf{T}$. Ela é uma equação cúbica em λ , e suas raízes são os autovalores.

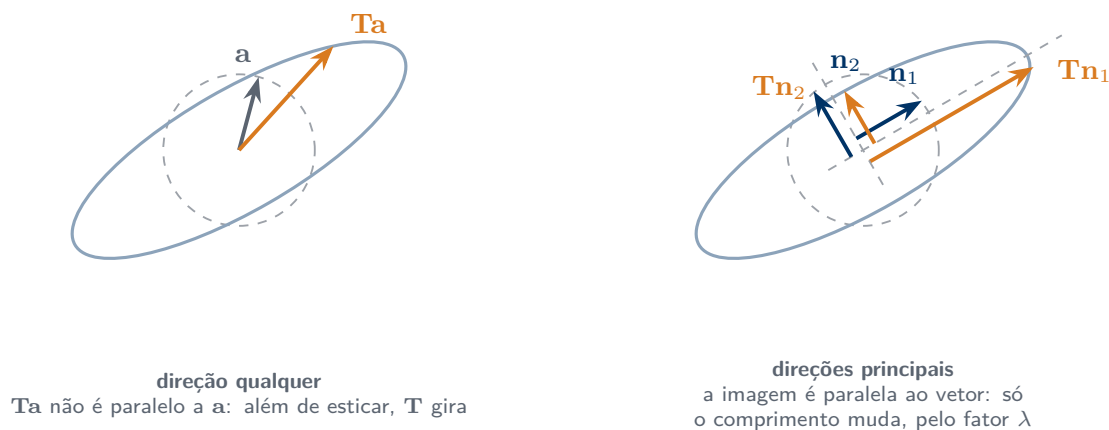


Figura 4: Um tensor simétrico leva o círculo unitário em uma elipse. Numa direção qualquer a imagem não é paralela ao vetor; nas direções principais, é.

EXEMPLO – AUTOVALORES E DIREÇÕES PRINCIPAIS

Seja

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é $\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 25) = 0$, de modo que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -5$.

Para $\lambda_1 = 2$, o sistema dá $n_2 = n_3 = 0$, e a condição de comprimento unitário fornece $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{e}_1$.

Para $\lambda_2 = 5$, as três equações reduzem-se a $n_1 = 0$ e $n_2 = 2n_3$; com $n_2^2 + n_3^2 = 1$ obtém-se $\mathbf{n}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Um autovetor fica determinado a menos do sinal — os dois sinais descrevem a mesma direção principal. Adaptado de (Lai, Rubin, e Kreml 2010, Ex. 2.22.4).

Tensores simétricos reais

RESULTADO 1.4 – TEOREMA ESPECTRAL (TENSORES SIMÉTRICOS REAIS)

Seja $\mathbf{T}$ um tensor simétrico com componentes reais. Então:

- (i) todos os autovalores de $\mathbf{T}$ são reais;
- (ii) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais;
- (iii) existe pelo menos um conjunto de três direções principais mutuamente ortogonais. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.23)

Este resultado é a razão de os tensores simétricos ocuparem um lugar próprio no curso: vários dos tensores introduzidos nas Unidades 2 e 3 serão simétricos, e é o Resultado 1.4 que autoriza atribuir a cada um deles **direções principais** — três direções ortogonais nas quais o tensor apenas alonga ou encurta, sem girar. Sem ele, essa linguagem não teria sentido.

Demonstração de (i). Admita, por um momento, que λ e $\mathbf{n}$ possam ser complexos, e denote por $\bar{\cdot}$ a conjugação complexa. De $T_{ij}n_j = \lambda n_i$ segue, multiplicando por $\bar{n}_i$ e somando,

$$\bar{n}_i T_{ij} n_j = \lambda \bar{n}_i n_i.$$

Conjugando toda a igualdade e usando que os T_{ij} são reais,

$$n_i T_{ij} \bar{n}_j = \bar{\lambda} \bar{n}_i n_i.$$

O lado esquerdo da segunda expressão é igual ao da primeira: basta trocar os nomes dos índices mudos $i \leftrightarrow j$ e usar $T_{ji} = T_{ij}$. Logo $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{n}_i n_i = 0$. Como $\bar{n}_i n_i = \sum_i |n_i|^2 > 0$ para $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, conclui-se $\lambda = \bar{\lambda}$, isto é, λ é real. ■

Demonstração de (ii). Sejam $\mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2\mathbf{n}_2$. Então

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2.$$

Pela simetria de $\mathbf{T}$, os dois lados esquerdos são iguais: $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}_1$, usando a Definição 1.6 do transposto. Subtraindo as duas igualdades,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0.$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. ■ (Ruderman 2019, Teorema 2.1)

i O caso de autovalores repetidos

As duas demonstrações acima cobrem o item (iii) apenas quando os três autovalores são distintos. Quando há raiz repetida o resultado continua válido, mas por outro argumento: se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são autovetores de um mesmo autovalor λ , então toda combinação $\alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2$ também é autovetor de λ , de modo que existe um *plano* inteiro de autovetores, dentro do qual se pode escolher duas direções ortogonais. O tratamento completo está em (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.23), e é **leitura recomendada, não exercício avaliado**.

Os invariantes principais

Expandindo $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ obtém-se a equação característica na forma

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (\text{igual nas duas notações})$$

$$I_1 = T_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}), \quad I_3 = \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} \quad (\text{indicial})$$

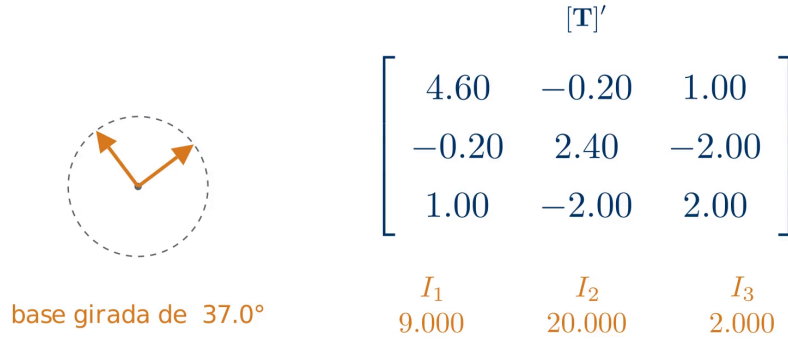
$$I_1 = \text{tr } \mathbf{T}, \quad I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)], \quad I_3 = \det \mathbf{T} \quad (\text{direta})$$

RESULTADO 1.5 – OS INVARIANTES PRINCIPAIS NÃO DEPENDEM DA BASE

Os coeficientes I_1 , I_2 e I_3 têm o mesmo valor em toda base ortonormal. Por essa razão são chamados **invariantes principais** de $\mathbf{T}$. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 2.25; Ruderman 2019, seq. 2.10)

O argumento é curto e vale a pena enunciá-lo antes da conta. Os autovalores são definidos por $\mathbf{T}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$, uma equação escrita sem referência a base alguma. Logo o conjunto dos autovalores não pode depender da base. Como I_1 , I_2 e I_3 são os coeficientes do polinômio cujas raízes são os autovalores, eles também não podem depender dela.

O que não muda quando a base muda



a matriz muda; a equação característica, não

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

Figura 5: Sob rotação da base as nove entradas de $[\mathbf{T}]'$ mudam; os três invariantes não. O quadro é o final da animação disponível na versão web.

A **verificação direta** desse fato — partindo da lei de transformação $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$ obtida em U1.T1 e mostrando que cada I_k é inalterado — é o exercício **PS1.4**, nos [Exercícios propostos](#).

Em termos dos autovalores, os invariantes assumem forma particularmente simples:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

EXEMPLO — INVARIANTES E EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Para o tensor do exemplo anterior,

$$I_1 = 2 + 3 - 3 = 2, \quad I_2 = -25, \quad I_3 = \det \mathbf{T} = -50,$$

e a equação característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$ fatora como $(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$ — os mesmos autovalores obtidos antes. Adaptado de (Lai, Rubin, e Kreml 2010, Ex. 2.25.1).

Os operadores diferenciais

Até este ponto do curso, um tensor era um objeto isolado. A partir daqui ele é um **campo**: a cada ponto $\mathbf{x}$ do espaço corresponde um valor. Um campo escalar associa a cada ponto um

número, como uma temperatura; um campo vetorial, um vetor, como uma velocidade; um campo tensorial, um tensor.

Todas as equações diferenciais deste curso são construídas com os cinco operadores desta seção.

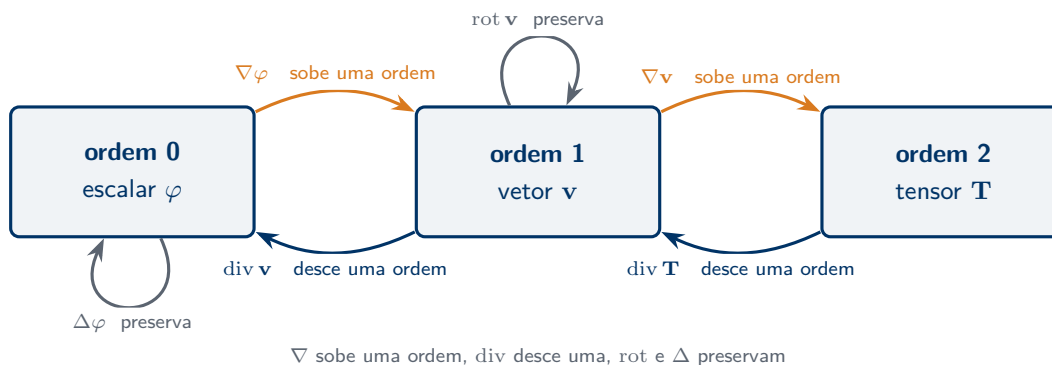


Figura 6: Cada operador é caracterizado pela ordem que recebe e pela ordem que devolve.

DEFINIÇÃO 1.10 – OS CINCO OPERADORES

Para um campo escalar φ , um campo vetorial $\mathbf{v}$ e um campo tensorial $\mathbf{T}$, todos definidos em coordenadas cartesianas com base ortonormal fixa:

$$(\nabla \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\nabla \varphi \quad \nabla \mathbf{v} \quad \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) \quad (\text{direta})$$

$$(\text{div } \mathbf{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{rot } \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\text{div } \mathbf{T} \quad \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad \Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \text{div}(\nabla \varphi) \quad (\text{direta})$$

O gradiente eleva em uma unidade a ordem do campo; a divergência a reduz em uma; o rotacional e o laplaciano preservam a ordem. Esse critério, sozinho, já descarta boa parte das expressões mal formadas.

Duas convenções fixadas de uma vez por todas

! Convenções adotadas em todo o curso, seguindo [Lai2010]

Ordem dos índices em $\nabla \mathbf{v}$. O curso adota $(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$: o **primeiro** índice é o da componente do campo, o **segundo** é o da derivada.

Índice contraído em $\operatorname{div} \mathbf{T}$. O curso adota $(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = \partial T_{ij} / \partial x_j$: a contração é no **segundo** índice.

As duas convenções são fixadas aqui, registradas na [tabela de notação](#), e não são rediscutidas em nenhuma sessão posterior (regra do curso; ver também (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seções 2.28–2.29)).

🔥 Aviso de leitura: [Ruderman2019] adota as convenções transpostas

Este ponto merece atenção porque envolve os dois livros de referência do curso, e não uma fonte distante.

(Ruderman 2019, seção 2.11) define $\nabla \mathbf{v} = (\partial v_j / \partial x_i) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, que é a **transposta** da convenção acima, e define a divergência de um tensor contraindo o **primeiro** índice, $\nabla \cdot \mathbf{T} = (\partial T_{ik} / \partial x_i) \mathbf{e}_k$.

Consequências práticas:

- para um tensor **simétrico**, as duas definições de divergência coincidem;
- para um tensor **qualquer**, elas diferem — uma é a divergência da transposta da outra;
- misturar as duas convenções em um mesmo cálculo produz um resultado transposto.

O curso adota a convenção de (Lai, Rubin, e Krempel 2010) em todos os quatro formatos e em todas as sessões.

Identities de produto

RESULTADO 1.6 — IDENTIDADES DE PRODUTO

Para um campo escalar φ , campos vetoriais $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ e um campo tensorial $\mathbf{T}$:

$$\frac{\partial(\varphi v_i)}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\text{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \quad (\text{direta})$$

Demonstração. É a regra do produto aplicada a cada termo da soma sobre i : $\partial(\varphi v_i)/\partial x_i = \varphi \partial v_i/\partial x_i + v_i \partial \varphi/\partial x_i$. Reconhecendo o primeiro termo como $\varphi \text{div} \mathbf{v}$ e o segundo como $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$, obtém-se a forma direta. ■

A segunda identidade é a que mais trabalho poupará adiante. Nela aparece o **produto duplamente contraído** de dois tensores,

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}),$$

que é um escalar, e que já constava da tabela de notação de U1.T1.

$$\frac{\partial(T_{ij} v_i)}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{direta})$$

Demonstração. Aplique a regra do produto a $\partial(T_{ij} v_i)/\partial x_j$. O primeiro termo é $v_i \partial T_{ij}/\partial x_j = \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T}$ pela convenção fixada acima; o segundo é $T_{ij} \partial v_i/\partial x_j = T_{ij} (\nabla \mathbf{v})_{ij}$, que é o produto duplamente contraído $\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v}$. À esquerda, $T_{ij} v_i = (\mathbf{T}^T \mathbf{v})_j$, cuja divergência é $\partial(T_{ij} v_i)/\partial x_j$. ■

i Onde esta segunda identidade será usada

A identidade $\text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v}$ foi escolhida entre muitas outras porque é exatamente a que a Unidade 3 emprega ao deduzir a equação da energia. Vale registrá-la na tabela de notação.

⚠ Uma advertência de notação, para depois

Todos os campos desta sessão são **estáticos**: dependem de $\mathbf{x}$ e de mais nada. Quando o tempo entrar, em U2.T1, a derivada temporal de um campo espacial receberá símbolo próprio, D/Dt , e escrever d/dt para um campo espacial passará a ser erro de notação. O operador não é definido aqui; o aviso é registrado agora para que o hábito não se forme errado.

O teorema da divergência para campos tensoriais

O caso vetorial, admitido

O caso vetorial é resultado do Cálculo e é admitido sem demonstração.

$$\int_V \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dV = \oint_S w_j n_j dS \quad (\text{indicial})$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \oint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{direta})$$

Aqui V é um **volume regular** — limitado, com fronteira S suave por partes — e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a S .

O caso tensorial

O caso tensorial não é um teorema novo. Ele se obtém do vetorial aplicando-o três vezes — uma para cada valor do índice livre — e reunindo os resultados.

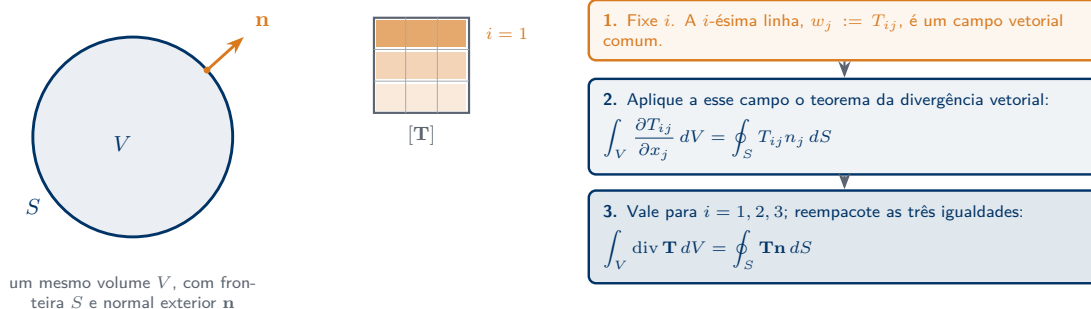


Figura 7: Fixado i , a i -ésima linha de $\mathbf{T}$ é um campo vetorial comum, ao qual se aplica o teorema já conhecido.

RESULTADO 1.7 — TEOREMA DA DIVERGÊNCIA PARA CAMPOS TENSORIAIS

Seja $\mathbf{T}$ um campo tensorial continuamente diferenciável em um volume regular V , de fronteira S com normal unitária exterior $\mathbf{n}$. Então:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S T_{ij} n_j dS \quad (\text{indicial})$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \mathbf{n} dS \quad (\text{direta})$$

Demonstração. Fixe um valor do índice livre i — digamos $i = 1$ — e defina o campo vetorial $\mathbf{w}$ pelas componentes da primeira linha de $\mathbf{T}$:

$$w_j := T_{1j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Como $\mathbf{T}$ é continuamente diferenciável, $\mathbf{w}$ também é, e o teorema da divergência vetorial aplica-se a ele:

$$\int_V \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dV = \oint_S w_j n_j dS \quad \Longleftrightarrow \quad \int_V \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} dV = \oint_S T_{1j} n_j dS.$$

O mesmo argumento, com $w_j := T_{2j}$ e depois $w_j := T_{3j}$, fornece as igualdades correspondentes a $i = 2$ e $i = 3$. As três igualdades escalares são as três componentes de uma única igualdade vetorial:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_S T_{ij} n_j dS, \quad i = 1, 2, 3.$$

Reconhecendo $\partial T_{ij}/\partial x_j$ como $(\operatorname{div} \mathbf{T})_i$ e $T_{ij} n_j$ como $(\mathbf{T} \mathbf{n})_i$, obtém-se a forma direta. ■

A demonstração acima é a destas notas, a partir do caso vetorial admitido do Cálculo. Em (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 4.18) este resultado é **aplicado** aos balanços integrais, e é lá que ele aparece em uso — não como enunciado independente.

i O que este resultado faz, e por que ele reaparece tantas vezes

O Resultado 1.7 converte uma integral sobre uma **superfície fechada** em uma integral sobre o **volume** que ela limita. É essa conversão que permite reunir, sob uma única integral de volume, termos que originalmente estavam em domínios de dimensões diferentes — e, uma vez reunidos, exigir que a soma se anule para *todo* volume.

Este é o primeiro dos dois ingredientes do método pelo qual as equações de campo da mecânica do contínuo são obtidas. O segundo é o **Teorema do Transporte (TTR)**, enunciado e demonstrado em U3.T1. O Resultado 1.7 será citado literalmente em U3.T1, U3.T2, U3.T3 e U9.L1.

A demonstração acima ilustra um ponto sobre a notação indicial que vale mais do que o teorema em si: escrito com índices, um enunciado sobre tensores torna-se um enunciado sobre vetores, e o teorema novo reduz-se a um teorema conhecido.

Coordenadas curvilíneas

Muitos problemas do curso têm simetria cilíndrica ou esférica — o escoamento em um tubo é o exemplo que a Unidade 6 tratará. Em geometrias assim, coordenadas cartesianas obrigam a descrever fronteiras simples por equações complicadas, e convém trocar de coordenadas.

O que muda, e o que não muda

As bases $\{e_r, e_\theta, e_z\}$ e $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$ continuam **ortonormais em cada ponto**, de modo que tudo o que U1.T1 estabeleceu sobre componentes e projeções continua valendo. O que muda é uma coisa só, e dela decorre todo o resto: **os vetores de base não são os mesmos em pontos diferentes**.

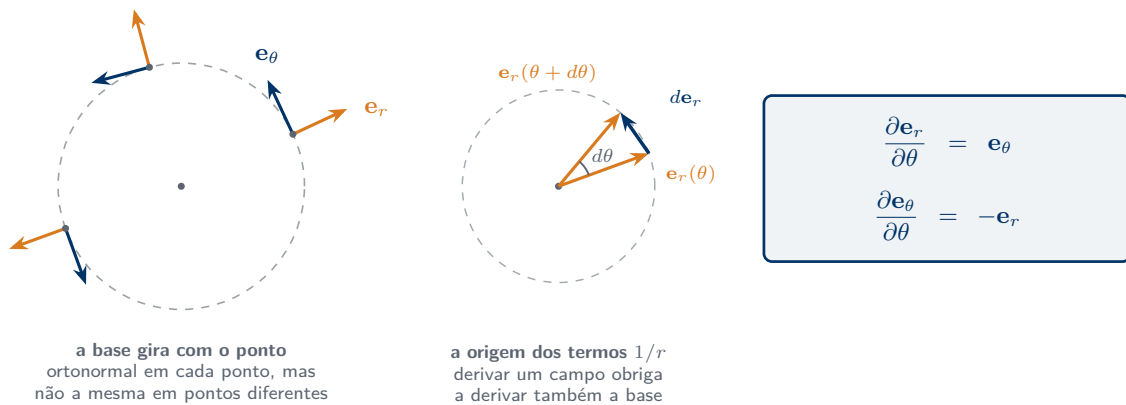


Figura 8: À esquerda, a base local em três pontos: sempre ortonormal, nunca a mesma. À direita, a conta que produz os termos $1/r$.

Em coordenadas polares, com $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ fixos,

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2.$$

Derivando em relação a θ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0}.$$

(Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 2.33)

Essa é a origem — a única — dos termos com $1/r$ nas fórmulas curvilíneas. Derivar um campo $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$ exige derivar também os vetores de base, pela regra do produto, e cada

derivada de base contribui com um termo adicional. Em coordenadas cartesianas esse trabalho não aparece porque ali $\partial \mathbf{e}_i / \partial x_j = 0$.

EXEMPLO – A ORIGEM DOS TERMOS COM $1/R$

Considere $\text{div } \mathbf{v}$ em coordenadas polares para o caso $\mathbf{v} = v_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$. A parcela de $\text{div } \mathbf{v}$ associada à derivada em θ é a projeção de $\frac{1}{r} \partial \mathbf{v} / \partial \theta$ sobre $\mathbf{e}_\theta$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_r.$$

O primeiro termo é o que se esperaria por analogia com o caso cartesiano; o segundo existe apenas porque $\mathbf{e}_\theta$ girou. É o mesmo mecanismo que, para $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r$, produz o termo v_r/r que aparece na linha de $\text{div } \mathbf{v}$ do formulário.

O formulário

As fórmulas de $\nabla \varphi$, $\nabla \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{v}$, $\text{rot } \mathbf{v}$, $\text{div } \mathbf{T}$ e $\Delta \varphi$ em coordenadas cilíndricas e esféricas estão reunidas em documento próprio:

FORMULÁRIO DE COORDENADAS CURVILÍNEAS

Formulário – coordenadas curvilíneas • versão para impressão

Documento de consulta permanente. O cabeçalho declara as convenções de que as fórmulas dependem. Uma de suas linhas é obtida do zero no exercício PS1.3.

Este curso **não** deduz o formulário linha a linha: seriam várias horas de manipulação com pouco conteúdo conceitual novo, uma vez compreendido o mecanismo da rotação da base. A dedução completa está em (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 2.33–2.35), como leitura para quem tiver interesse.

O exercício PS1.3 existe justamente para que o formulário não seja recebido inteiramente pronto: ele pede a dedução de uma de suas linhas, e o passo final compara o resultado obtido com a linha correspondente da tabela.

Tabela de notação – versão 1.0

Esta é a versão final da tabela inaugurada em U1.T1. As linhas anteriores são repetidas aqui, de modo que a tabela seja completa e autossuficiente; as linhas novas são as desta sessão.

A tabela é encerrada nesta versão — nenhuma sessão posterior acrescenta linhas a ela. A partir de U4.T1 haverá uma segunda tabela, com finalidade distinta: a correspondência com a convenção de sinais de (Bird, Stewart, e Lightfoot 2002).

Álgebra (U1.T1)

indicial	direta / matricial	observação
$a_i b_i$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	
$T_{ij} v_j$	$\mathbf{T} \mathbf{v}$	coluna j = comps. de $\mathbf{T} \mathbf{e}_j$
$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$	$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$	
$A_{ij} B_{ij}$	$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$	produto duplamente contraído
T_{ii}	$\text{tr } \mathbf{T}$	
$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$	base ortonormal	convenção do curso
δ_{ij}	$\mathbf{I}$	substitui índice; $\delta_{ii} = 3$
$(\mathbf{T}^T)_{ij} = T_{ji}$	$\mathbf{T}^T$	Definição 1.6
$A_{jk} B_{ki}$	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$	matricial mais econômica
$\varepsilon_{ijk} a_j b_k$	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i$	
$\varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$	$\det[\mathbf{A}]$	a forma direta apenas nomeia
$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn}$	—	Resultado 1.1; sem forma direta
$Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$	$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$	$\det \mathbf{Q} = \pm 1$
$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$	$[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{T}] [\mathbf{Q}]$	$Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$

Estrutura interna (U1.T2)

indicial	direta / matricial	observação
$S_{ij} = S_{ji}$	$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$	6 componentes independentes
$A_{ij} = -A_{ji}$	$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$	3 componentes; diagonal nula
$\frac{1}{2}(T_{ij} \pm T_{ji})$	$\frac{1}{2}(\mathbf{T} \pm \mathbf{T}^T)$	Resultado 1.3
$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$	$\mathbf{W} \mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$	Definição 1.8; ω é reservado
$w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij}$	—	inversão; usa $\varepsilon - \delta$
$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$	$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$	Definição 1.9
$I_1 = T_{ii}$	$\text{tr } \mathbf{T}$	
$I_2 = \frac{1}{2}(T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji})$	$\frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)]$	
$I_3 = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$	$\det \mathbf{T}$	

Cálculo (U1.T2)

indicial	direta / matricial	observação
$\partial\varphi/\partial x_i$	$\nabla\varphi$	sobe uma ordem
$\partial v_i/\partial x_j$	$\nabla\mathbf{v}$	1º índice = campo, 2º = derivada
$\partial v_i/\partial x_i$	$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla\mathbf{v})$	desce uma ordem
$\partial T_{ij}/\partial x_j$	$\text{div } \mathbf{T}$	contração no 2º índice
$\varepsilon_{ijk} \partial v_k/\partial x_j$	$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$	preserva a ordem
$\partial^2\varphi/\partial x_i\partial x_i$	$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi$	preserva a ordem
$\partial(\varphi v_i)/\partial x_i$	$\varphi \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi$	Resultado 1.6
$\partial(T_{ij}v_i)/\partial x_j$	$\mathbf{v} \cdot \text{div } \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla\mathbf{v}$	usada em U3
$\int_V \partial w_j/\partial x_j dV$	$\oint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS$	caso vetorial, admitido
$\int_V \partial T_{ij}/\partial x_j dV$	$\oint_S \mathbf{T}\mathbf{n} dS$	Resultado 1.7

Duas convenções desta tabela que decidem sinais

As duas linhas em negrito da última tabela são as que mais frequentemente geram discrepância com outros textos, inclusive com (Ruderman 2019), que adota ambas transpostas. Ao comparar uma fórmula deste curso com a de outro livro, verifique essas duas convenções antes de concluir que há erro. A seção [Duas convenções fixadas de uma vez por todas](#) detalha a diferença.

Exercícios propostos

Os dois exercícios abaixo integram a **Lista 1**, cuja divulgação segue o calendário da disciplina. Somados a PS1.1 e PS1.2, propostos em U1.T1, eles completam a lista.

PS1.3 – DIVERGÊNCIA DE UM TENSOR EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

O objetivo é obter, do zero, a componente radial de $\text{div } \mathbf{T}$ em coordenadas cilíndricas, e conferir o resultado contra a linha correspondente do formulário. Considere um campo tensorial $\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$, com $\alpha, \beta \in \{r, \theta, z\}$, e a base local $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$.

(a) Escreva as seis derivadas $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial \theta$ e $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial r$, para $\alpha \in \{r, \theta, z\}$. Três delas estão na seção [O que muda, e o que não muda](#); obtenha as outras três e justifique cada uma em uma linha.

(b) O operador ∇ em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Justifique o fator $1/r$ do segundo termo comparando o deslocamento $d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$ com a identidade $d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{x}$.

- (c) Usando o resultado de (b), escreva $\text{div } \mathbf{T}$ como a contração de ∇ com $\mathbf{T}$ segundo a convenção fixada nas **duas convenções de cálculo**, e identifique quais termos exigem derivar os vetores de base.
- (d) Usando (a) e (c), obtenha $(\text{div } \mathbf{T})_r$, isto é, a componente segundo $\mathbf{e}_r$. *Sugestão:* apenas os termos em que uma derivada de base produz $\mathbf{e}_r$ contribuem além dos termos “cartesianos”; pelo item (a), são poucos.
- (e) Compare o resultado de (d) com a linha correspondente do formulário. Se houver discrepância, indique em qual dos passos anteriores ela se origina. Este exercício tem roteiro mais detalhado que os demais porque a dedução correspondente não é feita em aula.

PS1.4 – OS INVARIANTES SOB MUDANÇA DE BASE

Sejam $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$ duas bases ortonormais relacionadas pelo tensor ortogonal $\mathbf{Q}$, com $Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$, de modo que $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$ (U1.T1, **lei de transformação**).

(a) Mostre que $I'_1 = I_1$, isto é, que $T'_{ii} = T_{ii}$. *Sugestão:* faça $j = i$ na lei de transformação e use $Q_{mi}Q_{ni} = \delta_{mn}$.

(b) Mostre que $T'_{ij}T'_{ji} = T_{ij}T_{ji}$. *Sugestão:* escreva as duas transformações, agrupe os quatro fatores Q em dois pares e aplique duas vezes a relação de ortogonalidade usada em (a).

(c) Conclua de (a) e (b) que $I'_2 = I_2$.

(d) Mostre que $I'_3 = I_3$. *Sugestão:* na forma direta, $[\mathbf{T}]' = [\mathbf{Q}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{Q}]$; use que o determinante de um produto é o produto dos determinantes e que $\det \mathbf{Q} = \pm 1$ (Resultado 1.2).

(e) *Verificação numérica.* Construa uma matriz 3×3 simétrica qualquer e uma rotação $\mathbf{Q}$ qualquer, calcule $[\mathbf{T}]'$ e compare os três invariantes de $[\mathbf{T}]$ e de $[\mathbf{T}]'$. Informe as diferenças obtidas e comente sua ordem de grandeza. A mesma verificação é feita no laboratório U1.L1, com numpy.

Estudo complementar, não avaliado. (Ruderman 2019), problemas 2.10 a 2.19 (cálculo tensorial e coordenadas curvilíneas). As soluções completas encontram-se no próprio livro; por essa razão tais problemas são indicados como estudo dirigido e não como exercícios avaliados.

Referências

- Bird, R. Byron, Warren E. Stewart, e Edwin N. Lightfoot. 2002. *Transport Phenomena*. 2ª ed. John Wiley & Sons.
- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Krepl. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.