

# U2.T1 — Descrições do movimento e derivada material

MAE369 — Mecânica e Fenômenos de Transporte · IM/UFRJ · 2026/2

---

# Onde estamos

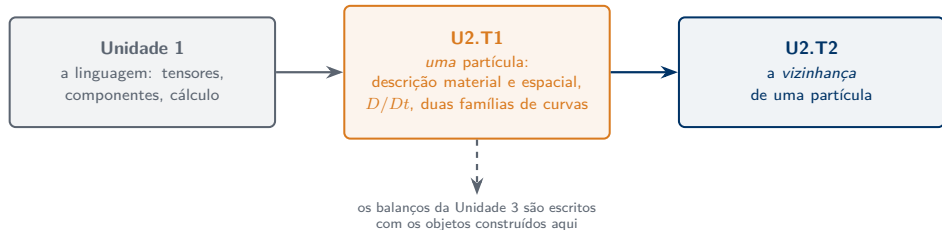


Figura 1

Hoje, **uma** partícula. Em U2.T2, a **vizinhança** dela. A caixa laranja é o roteiro de hoje: cada item nela é definido no seu próprio bloco.

# **01** | **Duas leituras do mesmo rio**

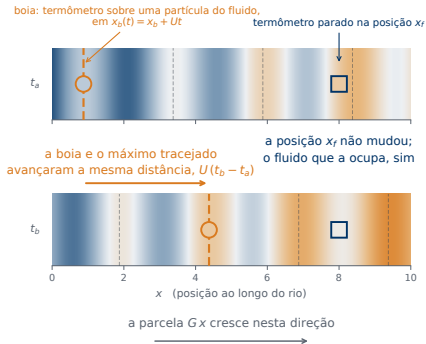
# O mesmo rio, dois termômetros

$$\theta(x, t) = \theta_0 + Gx + Ht + A \sin(k(x - Ut))$$

$Gx$  depende de  $x$ , não de  $t$ .  $Ht$  depende de  $t$ , não de  $x$ : o mesmo acréscimo em todo o rio.

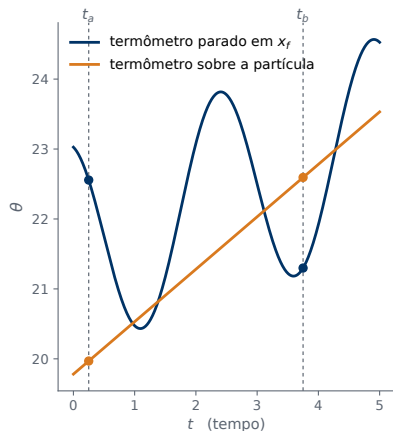
$A \sin(k(x - Ut))$  depende de  $x$  e  $t$  só pela combinação  $x - Ut$ ; o seu perfil avança com velocidade  $U$ , sem mudar de forma.

tracejado posições onde essa parcela é máxima. Avançam com velocidade  $U$ , a mesma do fluido, e permanecem sobre as mesmas partículas.



Dois termômetros iguais: um parado, o outro sobre uma partícula do fluido.

# As duas leituras



na partícula, em  $x_b + Ut$ :

$$\theta = \theta_0 + Gx_b + (GU + H)t + A\sin(kx_b)$$

Reta. O argumento do seno vale  $kx_b$   
e não depende de  $t$ .

no ponto parado  $x_f$ :

$$\theta = \theta_0 + Gx_f + Ht + A\sin(kx_f - kUt)$$

Sobe à taxa  $H$  e oscila. O argumento do  
seno depende de  $t$ .

Entre  $t_a$  e  $t_b$  a leitura em  $x_f$  diminui  
e a da partícula aumenta. Mesmo rio,  
instrumentos iguais, sinais opostos.

O parado está em  $x_f$ ; a partícula acompanhada estava em  $x_b$  em  $t = 0$ .

# A pergunta da sessão

## PERGUNTA DA SESSÃO

Como a leitura do medidor fixo se relaciona com o que a partícula sente?

A resposta ocupa uma linha, tem nome, e reaparece em quase todas as equações do resto do curso.

## **02** | **O movimento e as duas descrições**

## Rotular partículas num contínuo

Num corpo com finitas partículas, cada uma recebe um número.

Num contínuo há infinitas, e a numeração acaba. O rótulo passa a ser a **posição ocupada no instante de referência**  $t = 0$ . A região que o corpo ocupa nesse instante chama-se **configuração de referência**; a que ele ocupa no instante  $t$ , **configuração atual**.

A partícula que estava em **X** chama-se, para sempre, “a partícula **X**”.

# O movimento

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{direta})$$

$(X_1, X_2, X_3)$  são as **coordenadas materiais**;  $(x_1, x_2, x_3)$ , as **coordenadas espaciais** no instante  $t$ .

O rótulo é normalizado por  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ .

## Duas hipóteses, ditas uma vez

**Suavidade.** As funções  $x_i(\mathbf{X}, t)$  são diferenciáveis tantas vezes quantas cada passo exigir.

**Invertibilidade.** Para cada  $t$  fixo, o mapa é biunívoco: uma partícula por lugar, um lugar por partícula.

Segue que o movimento pode ser invertido:  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ .

# As duas descrições de um mesmo campo

Seja  $\Phi$  uma grandeza qualquer definida sobre o corpo: temperatura, densidade, uma componente de velocidade.

## DEFINIÇÃO 2.2 – DESCRIÇÃO MATERIAL E DESCRIÇÃO ESPACIAL

$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t)$  — dado o **rótulo** de uma partícula, devolve o valor para **aquela partícula**.

$\Phi(\mathbf{x}, t)$  — dado um **ponto do espaço**, devolve o valor para a partícula que ocupa aquele ponto naquele instante.

## A ponte entre as duas

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(x_1(\mathbf{X}, t), x_2(\mathbf{X}, t), x_3(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{indicial})$$

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{direta})$$

Da esquerda para a direita: descubra onde a partícula está e leia o campo ali.

Da direita para a esquerda, com a inversa: converta espacial em material.

# As duas configurações do corpo

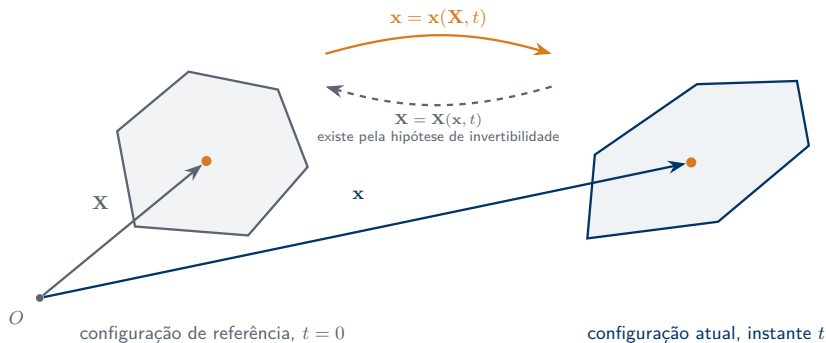


Figura 2

**Configuração de referência** ( $t = 0$ ) e **configuração atual** ( $t$ ), com uma só origem.

# Velocidade e aceleração de uma partícula

## DEFINIÇÃO 2.3 – VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DE UMA PARTÍCULA

As derivadas do movimento em relação ao tempo, com **X fixo**:

$$\begin{aligned}v_i &= \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}, & a_i &= \left. \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{indicial}) \\ \mathbf{v} &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}, & \mathbf{a} &= \left. \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{direta})\end{aligned}$$

O símbolo  $|_{\mathbf{x}}$  registra que a derivada segue a **mesma partícula**.

# Origem dos nomes

“Euleriana” para a descrição espacial; “lagrangiana”, ou “de referência”, para a material.

Os nomes são convenções consagradas, e os dois pontos de vista já circulavam na hidrodinâmica do século XVIII.

Eles designam **pontos de vista**, não autoria.

## 03 | A derivada material

# O que se quer calcular

O campo é conhecido na descrição espacial:  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ .

A partícula não fica num ponto. Ler o campo no ponto atual **não basta**: no instante seguinte ela está em outro lugar.

A operação que se quer: tomar um campo espacial, seguir uma partícula com ele, derivar em  $t$ .

# A definição

## DEFINIÇÃO 2.4 – DERIVADA MATERIAL

$$\frac{D\Phi}{Dt} := \left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_x \quad (\text{igual nas duas notações})$$

a taxa de variação de  $\Phi$  medida **acompanhando a partícula**.

A definição é imediata na descrição material. O que falta é uma **receita em termos do campo espacial** — que é o que se conhece.

## Derivação guiada — passos 1 e 2

**Passo 1.** A descrição material é uma composição:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(x_1(\mathbf{X}, t), x_2(\mathbf{X}, t), x_3(\mathbf{X}, t), t).$$

**Passo 2.** Derive em  $t$  com  $\mathbf{X}$  fixo. São **quatro** caminhos de dependência:

$$\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \left. \frac{\partial x_2}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \left. \frac{\partial x_3}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}$$

## Derivação guiada — passos 3 e 4

**Passo 3.** Os três últimos termos contraem-se pela convenção de Einstein:

$$\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left. \frac{\partial x_j}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$$

**Passo 4.** O fator  $\left. \partial x_j / \partial t \right|_{\mathbf{x}}$  já tem nome: pela Definição 2.3, é  $v_j$ .

# O resultado

## RESULTADO 2.1 – DERIVADA MATERIAL

Para todo campo  $\Phi$  na descrição espacial, com movimento suave e invertível:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v_j \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \partial_t \Phi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Phi \quad (\text{direta})$$

## Como ler os dois termos

$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  — **variação local**: o que o medidor da ponte registra. Nula se o campo não depende explicitamente de  $t$ .

$v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$  — **variação advectiva**: a correção por estar sendo carregado através de uma região onde  $\Phi$  varia de ponto a ponto. **Advecção** é esse transporte de uma propriedade pelo próprio movimento do meio.

# Os dois termos, em figura

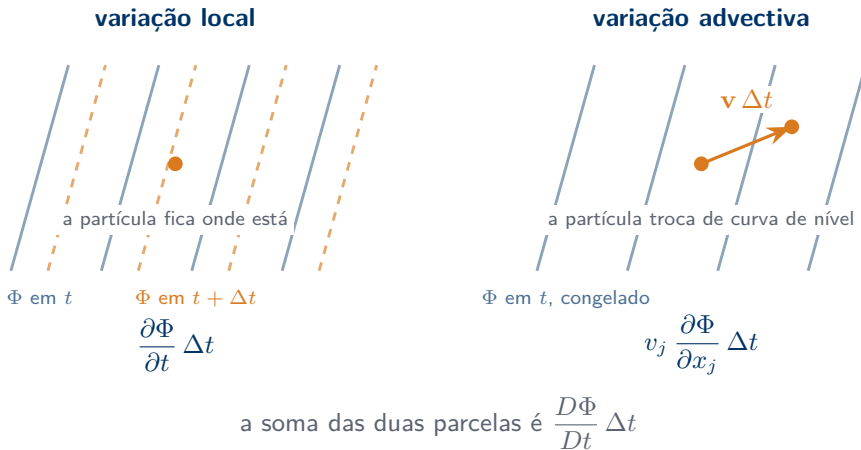


Figura 3

# A pergunta da sessão está respondida

## PERGUNTA DA SESSÃO

Como a leitura do medidor fixo se relaciona com o que a partícula sente?

A leitura do medidor é o **primeiro** termo. O que a partícula sente é a **soma** dos dois. A diferença entre as duas leituras é a advecção.

## O rio da abertura: as duas parcelas

Com  $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_1$  e o campo da abertura:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = H - A k U \cos(k(x - Ut)) , \quad U \frac{\partial \theta}{\partial x} = GU + A k U \cos(k(x - Ut))$$

Cada uma **oscila**, com a mesma amplitude  $A k U$  e sinais opostos.

# O que a partícula sente

## O RIO DA ABERTURA, RESOLVIDO

As duas parcelas oscilantes se cancelam, e sobra uma constante:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_j \frac{\partial\theta}{\partial x_j} = H + GU \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \partial_t \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = H + GU \quad (\text{direta})$$

## 0 caso $\Phi = \mathbf{v}$

### RESULTADO 2.2 – ACELERAÇÃO EM COORDENADAS ESPACIAIS

Aceleração da partícula que ocupa  $\mathbf{x}$  no instante  $t$ :

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{direta})$$

## O termo que carrega a dificuldade

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Este termo é **quadrático** em **v**: a velocidade aparece nele duas vezes, uma como fator e outra dentro da derivada.

A soma de duas soluções não produz a soma das duas acelerações.

Este é o lado esquerdo, ainda sem forças, da equação de **U6.T1**.

## Duas lacunas, deliberadamente abertas

1. A regra da cadeia do passo 2 exige diferenciabilidade de  $\Phi$  e do movimento.
2. A fórmula só é útil se for possível ir de  $\mathbf{x}$  para  $\mathbf{X}$  — isto é, usar a **inversa** do movimento, que diz qual partícula ocupa o ponto  $\mathbf{x}$  no instante  $t$ .

As duas são fechadas em **PS1.5**, item (a), num caso concreto e com roteiro.

## 04 | O campo-exemplo da Unidade 2

# O campo

## CAMPO-EXEMPLO DA UNIDADE 2

$$v_1 = \alpha x_2, \quad v_2 = \beta t, \quad v_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \alpha x_2 \mathbf{e}_1 + \beta t \mathbf{e}_2,$$

com  $\alpha > 0$  (inverso de tempo) e  $\beta > 0$  (aceleração), no plano  $(x_1, x_2)$  e para  $t \geq 0$ .

O primeiro termo faz camadas horizontais deslizarem umas sobre as outras; o segundo empurra todo o material para cima, cada vez mais depressa.

O campo **depende explicitamente de  $t$** .

# O campo, em figura

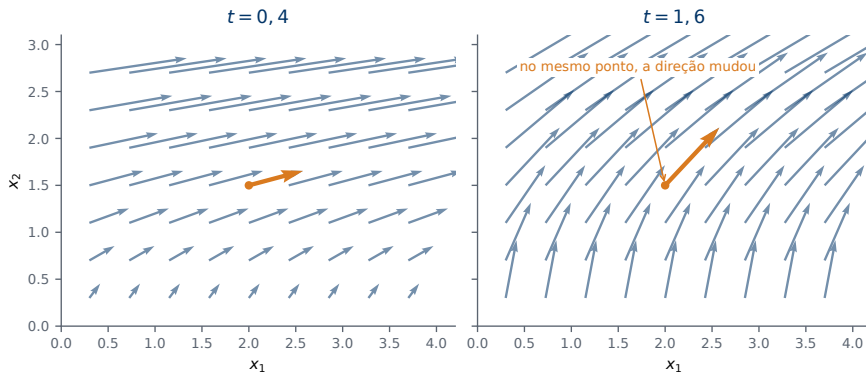


Figura 4

O mesmo campo em dois instantes; a seta laranja marca o **mesmo ponto**.

# A aceleração, componente a componente

$$a_1 = \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}}_0 + v_1 \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}}_0 + v_2 \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}}_\alpha = \alpha \beta t$$

$$a_2 = \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial t}}_\beta + v_1 \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}}_0 + v_2 \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}_0 = \beta, \quad a_3 = 0$$

## O mesmo cálculo, na notação direta

$$\partial_t \mathbf{v} = \beta \mathbf{e}_2, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \alpha \beta t \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a} = \alpha \beta t \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$$

As duas contas coincidem. Escrever nas duas notações é uma **verificação barata**, que apanha erro de índice.

# O medidor fixo e a partícula discordam

$v_1 = \alpha x_2$  **não depende de  $t$** : um medidor fixo conclui que nada acelera na direção  $x_1$ .

E, no entanto,  $a_1 = \alpha \beta t \neq 0$ .

As partículas sobem para camadas onde  $v_1$  é maior. A aceleração está **inteiramente** no termo advectivo.

## O movimento, em forma fechada

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 t + \frac{1}{6} \alpha \beta t^3, \quad x_2 = X_2 + \frac{1}{2} \beta t^2$$

Derivando **duas vezes** com **X** fixo:  $a_1 = \alpha \beta t$ ,  $a_2 = \beta$ .

Os mesmos valores, por um caminho independente.

# 05 | Linhas de corrente e trajetórias

## DEFINIÇÃO 2.5 – TRAJETÓRIA E LINHA DE CORRENTE

**Trajetoária:** a curva percorrida por uma partícula à medida que o tempo corre.

**Linha de corrente do instante  $t_0$ :** a curva tangente, em cada ponto, ao campo de velocidade **congelado** naquele instante.

## Duas equações

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dx_i}{ds} = v_i(\mathbf{x}, t_0) \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) \quad (\text{direta})$$

À esquerda o tempo **corre**. À direita ele está **congelado**, e  $s$  é um parâmetro auxiliar que não é tempo.

## Aqui $d/dt$ é legítimo

As duas equações usam  $d/dt$  e  $d/ds$ , não  $D/Dt$ .

A incógnita  $\mathbf{x}(t)$  é a posição de **uma** partícula: uma função só de  $t$ , não um campo.

Onde não há dependência espacial, não há ambiguidade a resolver.

# Quando as duas famílias coincidem

## RESULTADO 2.3 – CRITÉRIO DE COINCIDÊNCIA

Se o campo de velocidade se fatora como abaixo, com  $f > 0$  e **u independente do tempo**, então as linhas de corrente coincidem, como curvas, com as trajetórias. Em particular, isso vale sempre que o escoamento é **estacionário**, isto é, sempre que  $\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

$$v_i(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{direta})$$

## O campo-exemplo não satisfaz o critério

No ponto  $(x_1, x_2)$  com  $x_2 \neq 0$ , o vetor velocidade é  $(\alpha x_2, \beta t)$ .

Em  $t$  pequeno ele é quase horizontal; com  $t$  crescendo ele se inclina.

A **direção** muda com o tempo. Logo as duas famílias são distintas.

# As duas famílias, desenhadas

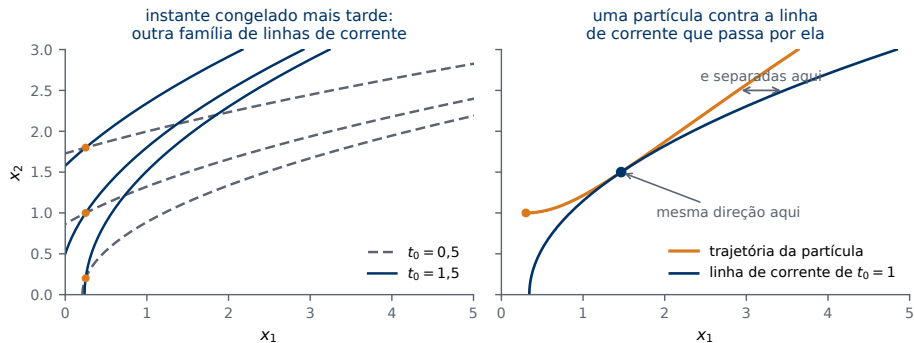


Figura 5

Linhas de corrente de dois instantes; depois, uma trajetória contra uma delas.

## O erro que a distinção previne

Visualizações de escoamento quase sempre desenhavam **linhas de corrente** — elas saem de um único instante do campo.

O material transportado segue **trajetórias**.

Em escoamento não estacionário, ler uma figura de linhas de corrente como o caminho do material é uma conclusão errada.

# Exercício proposto: PS1.5

## PS1.5 – DESCRIÇÕES, DERIVADA MATERIAL E AS DUAS FAMÍLIAS

Dado o campo  $v_1 = U_0(1 + \lambda t)$ ,  $v_2 = \gamma x_1$ ,  $v_3 = 0$ : obtenha o movimento e sua inversa, a velocidade nas duas descrições, a aceleração por dois caminhos independentes, a derivada material de um campo de temperatura, e as duas famílias de curvas.

Roteiro completo nas notas, em seis itens. O último é numérico.

# 06 | Deslocamento e movimento rígido

# O campo de deslocamento

## DEFINIÇÃO 2.6 – CAMPO DE DESLOCAMENTO

$$u_i = x_i - X_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

A mesma informação do movimento, escrita como diferença em vez de posição. Ele assume protagonismo em **U2.T2**, quando os deslocamentos forem pequenos.

# Movimento rígido

## RESULTADO 2.4 – EQUAÇÃO CINEMÁTICA DO MOVIMENTO RÍGIDO

Todo movimento que preserva as distâncias entre partículas tem a forma:

$$x_i(t) = c_i(t) + R_{ij}(t) [X_j - c_j(o)] \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t) [\mathbf{X} - \mathbf{c}(o)] \quad (\text{direta})$$

## Tudo o que esta fórmula exige já foi demonstrado

$\mathbf{R}(t)$  é **ortogonal próprio** — uma rotação, com  $\det \mathbf{R} = +1$  — e  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ .

$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , preservação do produto escalar,  $\det \mathbf{Q} = \pm 1$  — tudo estabelecido em **U1.T1**.  
O sinal  $+1$  sai de  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$  e da continuidade em  $t$ .

# O movimento rígido, em figura

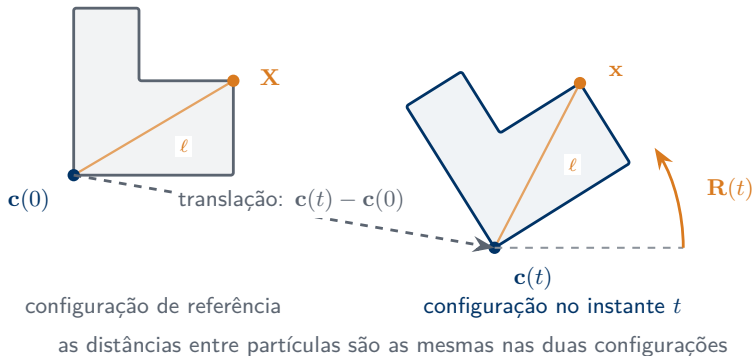


Figura 6

O segmento  $\ell$  liga as mesmas partículas, e mede o mesmo nas duas.

# Pergunta para a próxima sessão

## PERGUNTA PARA A PRÓXIMA SESSÃO

Que campo de velocidade um movimento rígido gera, e o que distingue esse campo do campo-exemplo desta sessão?

**07** | **Fecho**

# O que ficou

**Duas descrições.** Material segue a partícula; espacial fica no ponto. A ponte é a composição com o movimento.

**Uma derivada.**  $D\Phi/Dt = \partial_t\Phi + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\Phi$  — variação local mais advecção.

**Duas famílias de curvas.** Trajetórias e linhas de corrente, que só coincidem sob o critério do Resultado 2.3.

## O que vem em **U2.T2**

Hoje seguimos **uma** partícula. A próxima sessão olha a **vizinhança** dela.

Dessa mudança de foco saem: a resposta à pergunta do movimento rígido, a medida quantitativa da invertibilidade, e o vetor dual prometido em **U1.T2**, agora com significado cinemático.

# Referências

Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Kreml. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.

Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.