

U2.T2 — Deformação, taxa de deformação e spin

MAE369 — Mecânica e Fenômenos de Transporte · IM/UFRJ · 2026/2

Onde estamos

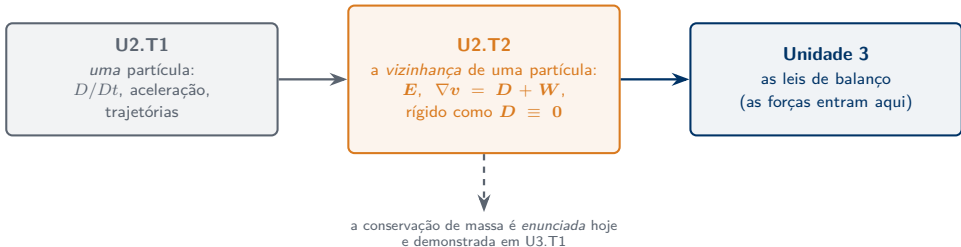
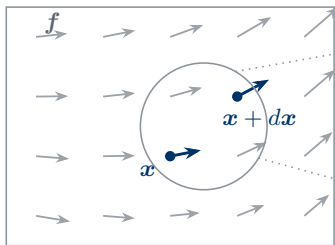


Figura 1

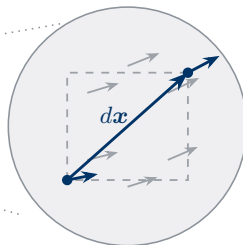
Na sessão passada, **uma** partícula. Hoje, a **vizinhança** dela.

01 | A vizinhança de um ponto

Um campo, e dois pontos dele



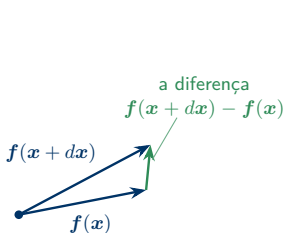
(a) f é um *campo*; dois vizinhos o leem em dois lugares



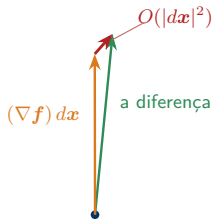
(b) de perto o campo varia pouco — e a variação tem estrutura

As duas leituras de f não são iguais. A diferença entre elas é o objeto desta sessão.

A diferença, e as suas duas parcelas



(c) as duas leituras, da mesma origem, e a diferença entre elas



(d) a diferença tem duas parcelas: a linear e o resto

$f(x+dx) = f(x) + (\nabla f) dx + O(|dx|^2)$. Neste desenho o resto vale 16,7% da parcela linear, porque dx é grande; reduzindo $|dx|$ pela metade, essa fração cai pela metade.

A expansão de Taylor, para um campo qualquer

$$f_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{indicial})$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{f}) d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{direta})$$

Vale para **qualquer** campo vetorial diferenciável $\mathbf{f}$. O enunciado não escolhe descrição: o que muda é a variável em que se deriva.

Duas aplicações, duas descrições

Campo	Descrição	Deriva-se em	O que sai dele
deslocamento u	material	X	a deformação E
velocidade v	espacial	x	a taxa D e o spin W

As duas descrições são as de U2.T1: a material segue a partícula pelo rótulo **X**; a espacial fica no lugar **x** e vê o material passar.

A parcela que interessa

$$v_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = v_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{direta})$$

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

Tudo o que distingue o vizinho da partícula está em $(\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x}$.

A pergunta da sessão

PERGUNTA DA SESSÃO

O que $\nabla \mathbf{v}$ sabe sobre o movimento da vizinhança de um ponto?

Ela permanece em aberto até o fecho da sessão.

02 | Deformação infinitesimal

Primeira aplicação: o deslocamento

Tome $\mathbf{f} = \mathbf{u}$, na **descrição material**. O campo de deslocamento já foi definido em U2.T1:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t).$$

O enunciado geral dá, com as derivadas em $\mathbf{X}$:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}) d\mathbf{X}.$$

Neste bloco, **o deslocamento e as suas derivadas são pequenos**.

O tensor que mede forma

DEFINIÇÃO 2.7 – TENSOR DE DEFORMAÇÃO INFINITESIMAL

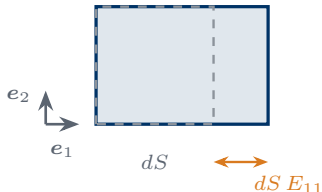
$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \right) \quad (\text{direta})$$

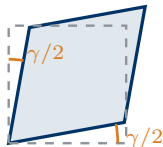
Simétrico por construção: seis componentes independentes. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seções 3.7; Ruderman 2019, seção 3.4)

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

O que cada componente mede



(a) E_{11} é o alongamento por unidade de comprimento de um elemento que estava em e_1 .



(b) cada aresta gira $\gamma/2$, e o ângulo entre elas perde $\gamma = 2E_{12}$.

tracejado: o elemento antes da deformação · cheio: depois

Os dois significados, enunciados

RESULTADO 2.5 – SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS COMPONENTES

1. Alongamento por unidade de comprimento na direção $\mathbf{n}$:

$$\frac{ds - dS}{dS} = n_i E_{ij} n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n} \quad (\text{igual nas duas notações}).$$

2. Decréscimo do ângulo entre elementos em $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$: vale $2E_{12}$.

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

(Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.8)

RESULTADO 2.6 – DILATAÇÃO

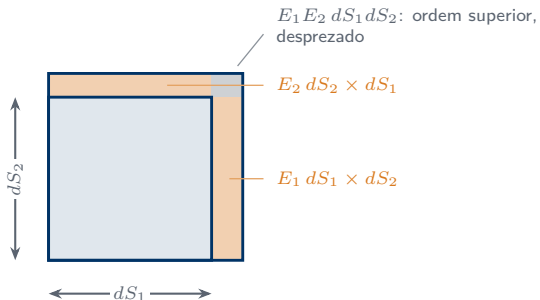
$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = \text{tr } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{u} \quad (\text{direta})$$

Como o traço não muda com a base, a dilatação também não muda. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.10)

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

De onde vem a soma



A área ganha, dividida pela área original, vale $E_1 + E_2$ a menos de termos de ordem superior. Em três dimensões, $E_1 + E_2 + E_3 = \text{tr } \mathbf{E}$.

O quadradinho cinza é o termo que a hipótese infinitesimal descarta.

03 | 0 gradiente de velocidade

Segunda aplicação: a velocidade

$$\frac{D}{Dt}(dx_i) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (\text{direta})$$

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

As pontas do elemento movem-se com as velocidades dos seus próprios pontos, logo $\frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$, e a expansão do início da aula fecha a conta.

$\nabla \mathbf{v}$ diz com que **velocidade** cada elemento material muda de comprimento e de direção. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.12)

As duas parcelas

RESULTADO 2.7 – DECOMPOSIÇÃO DO GRADIENTE DE VELOCIDADE

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + W_{ij} \quad (\text{indicial})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (\text{direta})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T \right)$$

D: taxa de deformação. **W**: spin. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.13; Ruderman 2019, seq. 3.5–3.6)

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em **x**.

A promessa de U1.T2 vence hoje

Em U1.T2, todo tensor antissimétrico ganhou um vetor dual:

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \quad W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k.$$

Lá ele era um objeto algébrico. Aqui ele ganha significado cinemático.

O vetor dual do spin

RESULTADO 2.8 – O VETOR DUAL DO SPIN

$$w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \omega_k \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{direta})$$

$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ é a **vorticidade**. O vetor dual do spin é **metade** dela. (Ruderman 2019, seq. 3.6)

A decomposição local

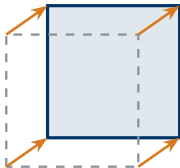
RESULTADO 2.9 – DECOMPOSIÇÃO LOCAL DO CAMPO DE VELOCIDADE

$$v_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_{ijk} w_j dx_k + D_{ij} dx_j \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \times d\mathbf{x} + \mathbf{D} d\mathbf{x} \quad (\text{direta})$$

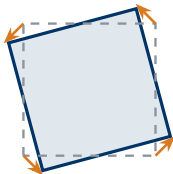
Translação · rotação rígida · estiramento puro. **Esta é a resposta completa à pergunta da sessão.** (Ruderman 2019, seq. 3.6; Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.14)

As três parcelas, em figura



translação

$$v(x)$$



rotação rígida

$$w \times dx$$



estiramento puro

$$D dx$$

Tracejado: o elemento no instante t . Cheio: o mesmo elemento um instante depois, sob a ação daquela parcela apenas. As setas laranjas são a parcela, avaliada em cada canto.

Por que “rígida”

$$\frac{D}{Dt} (|d\mathbf{x}|^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{x} + 2 \underbrace{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} d\mathbf{x}}_{=0}$$

Para $\mathbf{W}$ antissimétrico e qualquer $\mathbf{a}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}$.

Só $\mathbf{D}$ muda comprimentos. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.13)

O que as componentes de $\mathbf{D}$ medem

RESULTADO 2.10 – SIGNIFICADO DAS COMPONENTES DA TAXA DE DEFORMAÇÃO

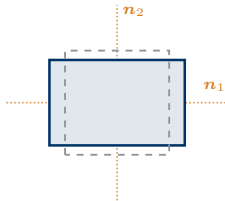
1. Taxa de alongamento na direção $\mathbf{n}$: $\frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}$ (igual nas duas notações).
2. Taxa de decréscimo do ângulo entre $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$: $2D_{12}$.
3. $\text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}$ é a taxa de variação **relativa de volume**.

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

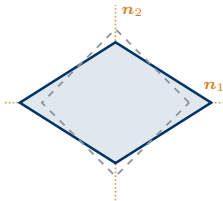
(Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.13)

Direções principais

Direções principais de D : os seus autovetores (U_1, U_2).



(a) lados nas direções principais:
os ângulos retos permanecem retos



(b) lados a 45° delas:
o ângulo reto se abre

A mesma D nos dois painéis; pontilhado laranja: as direções principais de D . A taxa de cisalhamento é nula em (a) e não é nula em (b) — ela depende do par de direções, não do material.

A taxa de cisalhamento depende do **par de direções**, não do material.

O campo-exemplo da unidade

$$v_1 = \alpha x_2, \quad v_2 = \beta t, \quad v_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \alpha x_2 \mathbf{e}_1 + \beta t \mathbf{e}_2$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O termo βt não aparece: ele é uniforme no espaço.

As duas partes, e o vetor dual

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ -\alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De $W_{12} = -w_3$ vem $\mathbf{w} = -\frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3$; e $\text{rot } \mathbf{v} = -\alpha \mathbf{e}_3$ confirma o fator $\frac{1}{2}$.

O que este escoamento faz, ponto a ponto

Autovalores de **D**: $+\alpha/2$, $-\alpha/2$, 0, com

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2).$$

$\text{tr } \mathbf{D} = 0$: cada elemento material **conserva o volume** e muda de forma o tempo todo.

04 | Corpo rígido

A pergunta que ficou de U2.T1

Em U2.T1, o movimento rígido ganhou a sua equação cinemática:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t) (\mathbf{X} - \mathbf{c}(0)).$$

E ficou a pergunta: **como esse movimento se enxerga em $\nabla \mathbf{v}$?**

A resposta, nos dois sentidos

RESULTADO 2.11 – MOVIMENTO RÍGIDO E TAXA DE DEFORMAÇÃO NULA

Num corpo que ocupa uma região **conexa** — dois pontos quaisquer ligados por um caminho dentro dela:

1. movimento rígido $\Rightarrow$

$$v_i = \dot{c}_i + \varepsilon_{ijk} w_j (x_k - c_k) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (\text{direta})$$

e $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$;

2. $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow$ o movimento é rígido.

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

Ida: a rotação entrega um tensor antissimétrico

Derivando a equação cinemática e eliminando $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T.$$

De $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ segue $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T = \mathbf{0}$. Logo $\nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}$ e $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Volta: $\mathbf{W}$ não pode variar no espaço

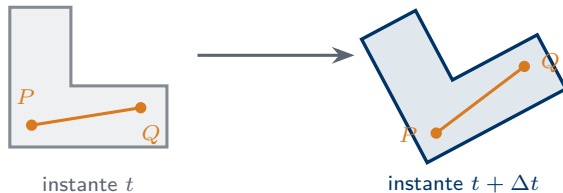
Com $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$ vale $\partial v_i / \partial x_j = W_{ij}$, e então

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial W_{ik}}{\partial x_j} = -\frac{\partial W_{kj}}{\partial x_i} = \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial W_{ji}}{\partial x_k} = -\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k}.$$

Cada passo faz uma de duas coisas: troca a ordem de duas derivadas, ou aplica $W_{ab} = -W_{ba}$.

Um número igual ao seu oposto é zero: $\mathbf{W}$ é constante.

O rígido, em figura



A distância entre P e Q é a mesma nos dois instantes, e o mesmo vale para qualquer outro par de pontos do corpo. Nenhum elemento material estica: $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, e resta apenas o spin $\mathbf{W}$.

Nove graus de liberdade viram seis

Meio contínuo geral	Corpo rígido
$\nabla \mathbf{v}$: nove componentes variando de ponto para ponto mais a velocidade de cada ponto	$\mathbf{W}$: três componentes as mesmas em todo o corpo mais três da velocidade de um ponto

A mecânica dos corpos rígidos é o caso **degenerado** da mecânica do contínuo, e não o contrário.

Um teste de sanidade que volta em U4

Movimento rígido $\Rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Qualquer descrição do comportamento de um material que dependa de $\mathbf{D}$ atribui, automaticamente, **efeito nulo** a um movimento rígido.

05 | Deformação finita, em sobrevoo

O que muda neste bloco

Até aqui: deformações **infinitesimais (E)** ou **taxas instantâneas (D)**.

Agora: a descrição **exata**, válida para deformações de qualquer tamanho.

Enunciados e figuras, sem demonstrações. O material completo está no handout que acompanha a sessão.

O gradiente de deformação

DEFINIÇÃO 2.8 – GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO

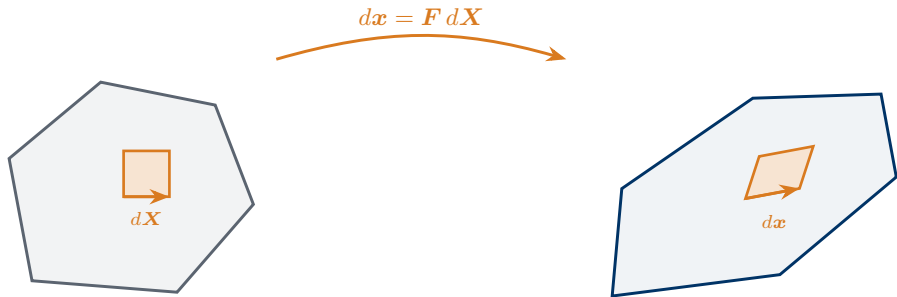
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (\text{direta})$$

A invertibilidade assumida em U2.T1 equivale a $\det \mathbf{F} > 0$. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.18)

Descrição material — deriva-se em $\mathbf{X}$.

F é o retrato linear local



configuração de referência, $t = 0$

configuração atual, instante t

F é linear: leva retas em retas e o quadradinho no paralelogramo desenhado. Ele descreve a vizinhança de uma partícula, e nada além dela.

Decomposição polar

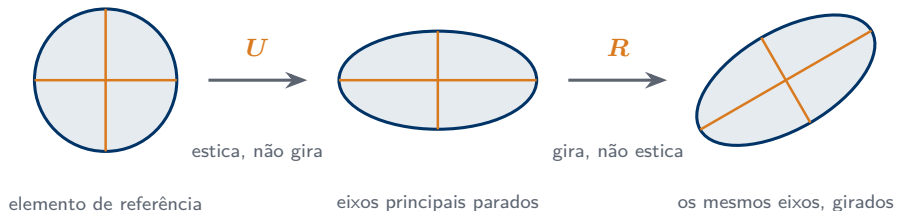
RESULTADO 2.12 – DECOMPOSIÇÃO POLAR

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{igual nas duas notações}),$$

com $\mathbf{R}$ ortogonal própria ($\det \mathbf{R} = +1$) e $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ simétricos e positivos definidos ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{U}\mathbf{a} > 0$ para $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). A decomposição é **única**.

Lê-se da direita para a esquerda: estica, depois gira. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.21)

Os dois passos, em figura



Aqui o elemento é uma esfera, porque a imagem de uma esfera exibe os estiramentos principais como os semieixos do elipsoide. $F = RU$: a mesma deformação, lida como um estiramento puro seguido de uma rotação rígida. A decomposição é única.

O tensor de Cauchy-Green

RESULTADO 2.13 – TENSOR DE CAUCHY-GREEN À DIREITA

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}, \quad dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} = dX_i^{(1)} C_{ij} dX_j^{(2)} \quad (\text{indicial})$$

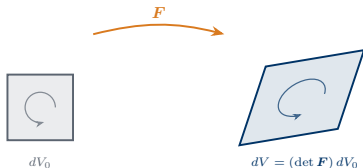
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}^{(2)} \quad (\text{direta})$$

Comprimentos e ângulos da configuração atual, escritos em variáveis materiais (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.23). $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ caracteriza os movimentos rígidos (Ruderman 2019, seq. 3.4).

O fator de volume

RESULTADO 2.14 – MUDANÇA DE VOLUME

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (\text{igual nas duas notações}).$$



Aqui $\det \mathbf{F} = 1,70$: o elemento ocupa 70% a mais de volume. A exigência $\det \mathbf{F} > 0$ é a mesma invertibilidade assumida em U2.T1, agora com um número associado a ela.

E e **D** são as versões linearizada e instantânea desta maquinaria. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.27–3.28)

06 | Conservação de massa

Uma equação que hoje não será demonstrada

RESULTADO 2.15 – CONSERVAÇÃO DE MASSA (DEMONSTRAÇÃO EM U3.T1)

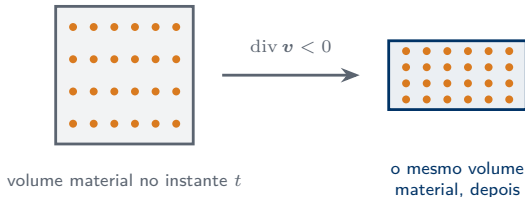
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{direta})$$

Descrição espacial — ρ e $\mathbf{v}$ são campos de $\mathbf{x}$.

ρ é a densidade do meio: a massa por unidade de volume.

O argumento de plausibilidade



A mesma massa em metade do volume: a densidade dobra. A conservação de massa é a forma instantânea desta contabilidade.

$\text{div } \mathbf{v}$ é a taxa relativa de variação de volume (Resultado 2.10). Massa fixa em volume que encolhe: a densidade sobe.

O que falta tem nome

A regra que deriva no tempo uma integral sobre um volume que se move com o material é o **Teorema do Transporte (TTR)**.

Ele abre a próxima sessão, **U3.T1**. A conservação de massa é a sua primeira consequência, e o mesmo procedimento produz todas as demais leis de balanço do curso.

07 | **Fecho**

A Lista 1 está completa

Item	Assunto	Proposto em
PS1.1	Símbolos de permutação	U1.T1
PS1.2	Decomposição simétrica e antissimétrica	U1.T1
PS1.3	Divergência em cilíndricas	U1.T2
PS1.4	Invariantes sob mudança de base	U1.T2
PS1.5	Descrições e derivada material	U2.T1
PS1.6	Taxa de deformação e spin	U2.T2

O enunciado completo de cada item está nas notas.

Exercício proposto: PS1.6

PS1.6 – TAXA DE DEFORMAÇÃO, SPIN E DIREÇÕES PRINCIPAIS

Para o campo $v_1 = 3kx_2$, $v_2 = kx_1$, $v_3 = kx_3$, com $k > 0$: obtenha **D** e **W**; obtenha **w** por dois caminhos e verifique o Resultado 2.8; obtenha as direções principais de **D**; decida se o elemento material ganha ou perde volume; e verifique tudo com numpy.

O enunciado completo, com os seis roteiros, está nas notas.

A pergunta da sessão, respondida

A PERGUNTA DA SESSÃO, RESPONDIDA

$\mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{x})+\mathbf{w}\times d\mathbf{x}+\mathbf{D} d\mathbf{x}$ (igual nas duas notações; forma indicial no Resultado)

Translação, rotação rígida e estiramento puro — e nada mais.

O que vem em U3

Até agora, **nenhuma força apareceu**. Toda a cinemática foi construída sem elas.

Na Unidade 3 a física entra — e entra por um único procedimento, repetido: escrever um balanço num volume material, aplicar o Teorema do Transporte, e localizar.

Referências

Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Kreml. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.

Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.