

Deformação finita — enunciados de referência

Gradiente de deformação, decomposição polar e mudanças de volume · MAE369 · IM/UFRJ

Documento de consulta. Reúne os enunciados da descrição **exata** da deformação — válida para deformações de qualquer tamanho, e não apenas para as infinitesimais. Nenhuma demonstração é dada aqui; as deduções completas estão em (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.18–3.28). A numeração das caixas é a das [notas de U2.T2](#), para que os dois documentos possam ser citados um pelo outro.

O objeto central

Um movimento leva a posição de referência $\mathbf{X}$ de uma partícula na sua posição atual $\mathbf{x}$. O gradiente desse mapa, tomado nas coordenadas materiais, é o retrato **linear local** do movimento.

DEFINIÇÃO 2.8 — GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (\text{direta})$$

A invertibilidade do movimento equivale a $\det \mathbf{F} > 0$. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.18)

Descrição material — deriva-se em $\mathbf{X}$, e o resultado age sobre elementos da configuração de referência.

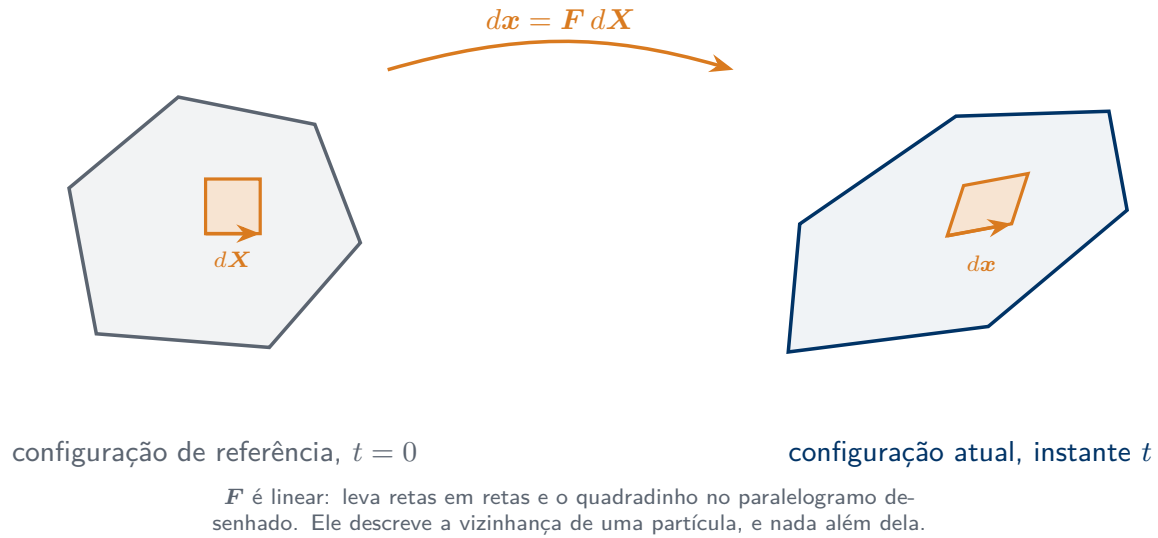


Figura 1: F leva o elemento material $d\mathbf{X}$ em $d\mathbf{x}$, e um quadradinho em um paralelogramo.

Estiramento e rotação, separados

RESULTADO 2.12 – DECOMPOSIÇÃO POLAR

Todo F com $\det F \neq 0$ se escreve, de modo único, como

$$F = R U = V R \quad (\text{igual nas duas notações}),$$

com R ortogonal própria ($\det R = +1$) e U, V simétricos e positivos definidos — isto é, $a \cdot Ua > 0$ para todo $a \neq 0$. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.21)

RESULTADO 2.13 – TENSOR DE CAUCHY-GREEN À DIREITA

Com $C = U^2$:

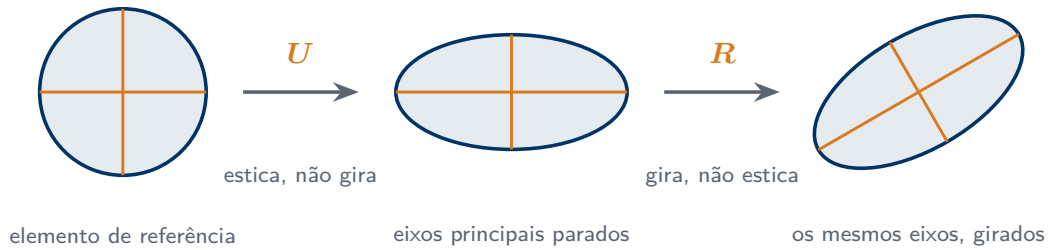
$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (\text{indicial})$$

$$dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} = dX_i^{(1)} C_{ij} dX_j^{(2)}$$

$$C = F^T F \quad (\text{direta})$$

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot C d\mathbf{X}^{(2)}$$

C carrega todos os comprimentos e ângulos da configuração atual, escritos em variáveis materiais (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.23). A condição $C = I$ caracteriza os movimentos rígidos (Ruderman 2019, seq. 3.4).



Aqui o elemento é uma esfera, porque a imagem de uma esfera exibe os estiramentos principais como os semieixos do elipsoide. $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$: a mesma deformação, lida como um estiramento puro seguido de uma rotação rígida. A decomposição é única.

Figura 2: Sob $\mathbf{U}$ o elemento estica e os eixos principais ficam parados; sob $\mathbf{R}$ ele gira sem mudar de forma.

Volume e área

RESULTADO 2.14 – MUDANÇAS DE VOLUME E DE ÁREA

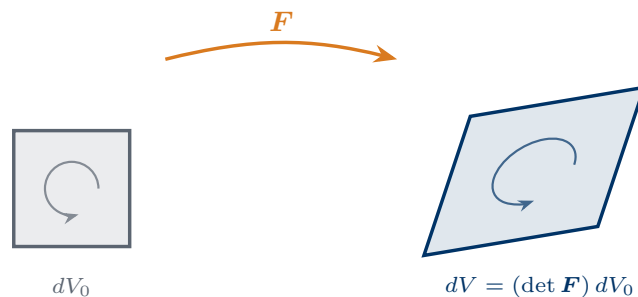
$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (\text{indicial})$$

$$n_i dA = (\det \mathbf{F}) (F^{-1})_{ji} (n_0)_j dA_0$$

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (\text{direta})$$

$$\mathbf{n} dA = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 dA_0$$

A segunda relação é a fórmula de Nanson. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seções 3.27–3.28)



Aqui $\det \mathbf{F} = 1,70$: o elemento ocupa 70% a mais de volume. A exigência $\det \mathbf{F} > 0$ é a mesma invertibilidade assumida em U2.T1, agora com um número associado a ela.

Figura 3: O fator de volume é $\det \mathbf{F}$.

Onde cada objeto é usado

Objeto	Onde reaparece	Para quê
$\mathbf{F}$	U4.T1	escrever o que significa uma descrição de material não depender do observador
$\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$ da decomposição polar	U4.T1	separar a rotação do estiramento antes de impor essa exigência
$\mathbf{C}$	U4.T1	medida de deformação que já não contém rotação
$\det \mathbf{F}$	U2.T1 (invertibilidade); U3.T1	fator de volume; é a invertibilidade assumida em U2.T1, agora com um número
Fórmula de Nanson	U3.T2 e adiante	converter integrais de superfície entre as duas configurações

Como isto se liga ao que já foi visto

O tensor de deformação infinitesimal $\mathbf{E}$ e a taxa de deformação $\mathbf{D}$ são as versões **linearizada** e **instantânea** desta maquinaria. $\mathbf{E}$ aproxima a informação contida em $\mathbf{C}$ quando o deslocamento e as suas derivadas são pequenos; $\mathbf{D}$ mede a taxa com que essa informação muda. As três descrições contam a mesma história, em três regimes.

Referências

- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Kreml. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.