

U2.T1 — Descrições do movimento e derivada material

Sessão U2.T1 · data: ver calendar-map

[Slides](#) [Slides PDF](#) [Notas PDF](#)

A Unidade 1 construiu a linguagem: o que é um tensor, como suas componentes mudam de base, como campos variam no espaço. Nada nela se movia. Esta sessão abre a **cinemática do contínuo** — a descrição do movimento de um meio contínuo, ainda **sem forças**. As forças entram na Unidade 3; a ordem é deliberada, porque as leis de balanço da Unidade 3 são escritas com os objetos que esta unidade constrói.

A sessão instala dois deles. O primeiro é o par de **descrições** do movimento: seguir uma partícula, ou ficar num lugar e ver o material passar. O segundo é a **derivada material**, o operador que converte uma leitura na outra. Sem esses dois, o enunciado central do curso, que chega em U3.T1, não é sequer legível.

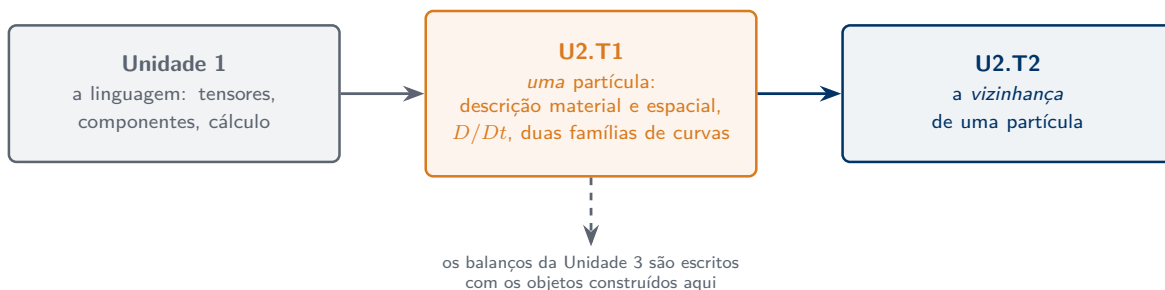


Figura 1: Onde esta sessão fica: a Unidade 1 forneceu a linguagem; U2.T1 descreve o movimento de uma partícula; U2.T2 olha a vizinhança dela.

Duas leituras do mesmo rio

Considere dois termômetros idênticos instalados no mesmo rio.

O primeiro está aparafusado no pilar de uma ponte. Ele não sai do lugar. A cada instante ele mede a temperatura da água **que passa naquele ponto**, e essa água é outra a cada instante.

O segundo viaja numa boia à deriva. Ele acompanha sempre a mesma porção de água. A cada instante ele mede a temperatura **da porção que ele acompanha**, e essa porção está a cada instante num lugar diferente.

Os dois registram uma função do tempo. As duas funções são, em geral, diferentes — e a diferença não é ruído de medição: os dois instrumentos medem grandezas distintas. Para que a afirmação não fique no plano da retórica, ela é feita sobre um rio concreto.

O RIO DA FIGURA

Suponha o escoamento uniforme, com velocidade U na direção do eixo x , e a temperatura dada por

$$\theta(x, t) = \theta_0 + Gx + Ht + A \sin(k(x - Ut)),$$

com constantes positivas G , H e A . São três parcelas, com papéis distintos.

1. Gx **depende de x e não depende de t** . Ela contribui com a constante G para $\partial\theta/\partial x$: em qualquer instante, a temperatura cresce com x por causa desta parcela.
2. Ht **depende de t e não depende de x** . Ela acrescenta, a cada instante, o mesmo valor em todos os pontos do rio.
3. $A \sin(k(x - Ut))$ **depende de x e de t apenas pela combinação $x - Ut$** . Uma consequência disso será usada o tempo todo, e vale enunciá-la: se um ponto se move com velocidade U , isto é, se $x(t) = x_0 + Ut$, então $x(t) - Ut = x_0$ é constante, e esta parcela vale $A \sin(kx_0)$ para sempre. Dito de outro modo: **o perfil desta parcela avança com velocidade U , sem mudar de forma**, e quem viaja com velocidade U não a vê variar.

Com esse campo, as duas leituras podem ser escritas, e não há o que discutir sobre elas.

O termômetro fixo, na posição x_f , registra

$$\theta(x_f, t) = \theta_0 + Gx_f + Ht + A \sin(kx_f - kUt).$$

Ele sobe à taxa H e, ao mesmo tempo, **oscila**. A oscilação vem do último termo: o argumento do seno, $kx_f - kUt$, depende de t , porque x_f é fixo e o tempo corre. Descontada a subida Ht , o que resta é periódico, de período $2\pi/(kU)$.

O termômetro da boia parte de x_b e é levado pelo escoamento, de modo que sua posição no instante t é $x_b + Ut$. Substituindo,

$$\theta(x_b + Ut, t) = \theta_0 + Gx_b + (GU + H)t + A \sin(kx_b).$$

É uma função **afim** do tempo — isto é, do primeiro grau — de inclinação $GU + H$, e **não oscila**: o argumento do seno vale kx_b , que não depende de t , pelo motivo enunciado no item 3

acima. Ela sobe por duas causas somadas. Uma é o aquecimento uniforme H , que qualquer ponto do rio sofre, parado ou não. A outra é GU : a boia percorre a distância Ut e, ao longo dela, a parcela Gx cresce.

$$\theta(x, t) = \theta_0 + Gx + Ht + A \sin(k(x - Ut))$$

Gx depende de x , não de t . Ht depende de t , não de x : o mesmo acréscimo em todo o rio.

$A \sin(k(x - Ut))$ depende de x e t só pela combinação $x - Ut$; o seu perfil avança com velocidade U , sem mudar de forma.

tracejado posições onde essa parcela é máxima. Avançam com velocidade U , a mesma do fluido, e permanecem sobre as mesmas partículas.

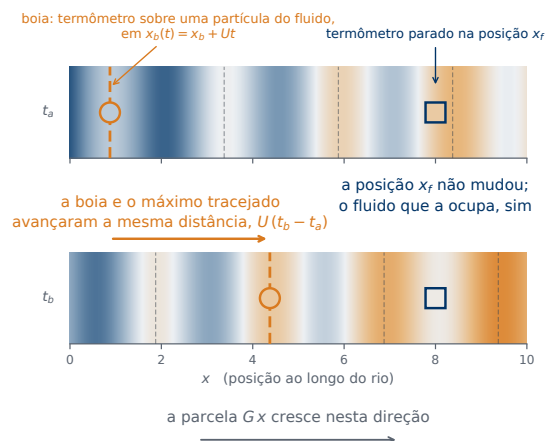


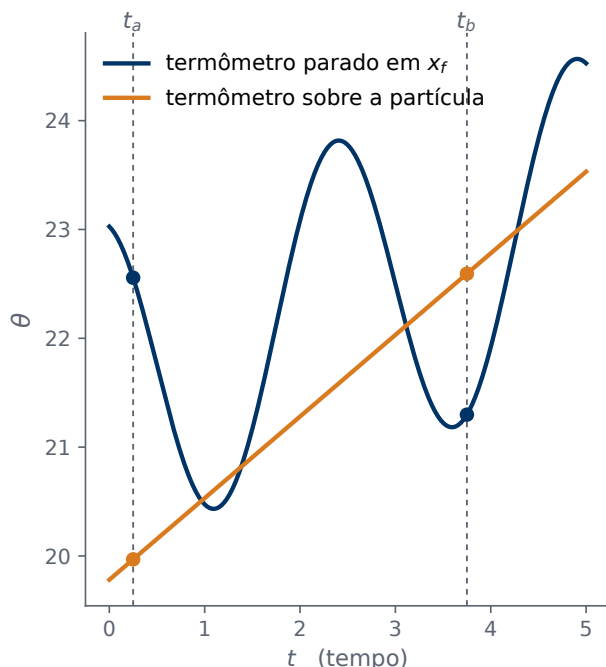
Figura 2: O rio em dois instantes. O eixo horizontal é a posição; o tempo é o eixo da figura seguinte. A legenda no alto define as três parcelas do campo e os tracejados. O preenchimento de cada marcador é a cor do campo no ponto e no instante em que o instrumento está, isto é, a sua leitura.

Entre os dois instantes retratados na figura, o termômetro do pilar **esfria** e o da boia **esquenta**. Os instrumentos são idênticos, o rio é o mesmo, os sinais são opostos, e nenhum dos dois está com defeito. A separação entre as duas inclinações — H de um lado, $GU + H$ do outro — tem nome, e o nome aparece na [seção da derivada material](#).

PERGUNTA DA SESSÃO

Como a leitura do medidor fixo se relaciona com o que a partícula sente?

A resposta tem nome, e é o Resultado 2.1 desta sessão. Ela ocupa uma linha, e essa linha reaparece em quase todas as equações do restante do curso.



na partícula, em $x_b + Ut$:

$$\theta = \theta_0 + Gx_b + (GU + H)t + A\sin(kx_b)$$

Reta. O argumento do seno vale kx_b e não depende de t .

no ponto parado x_f :

$$\theta = \theta_0 + Gx_f + Ht + A\sin(kx_f - kUt)$$

Sobe à taxa H e oscila. O argumento do seno depende de t .

Entre t_a e t_b a leitura em x_f diminui e a da partícula aumenta. Mesmo rio, instrumentos iguais, sinais opostos.

Figura 3: Os dois registros, e o motivo de cada um, tirado da própria fórmula.

O movimento e as duas descrições

Rotular partículas

Na cinemática do ponto material, uma partícula é acompanhada por sua posição $x(t)$, e pronto: há uma partícula, ou um número finito delas, e cada uma pode receber um número. Num contínuo há infinitas partículas, e a numeração deixa de ser possível. É preciso outro rótulo.

O rótulo adotado é a **posição ocupada num instante de referência**. Fixa-se o instante $t = 0$; a região ocupada pelo corpo nesse instante é a **configuração de referência**; e a partícula que estava no ponto X passa a ser chamada, para sempre, de “a partícula X ”. O rótulo é um ponto do espaço, mas usado como nome próprio: ele identifica material, não lugar. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.1)

DEFINIÇÃO 2.1 – CONFIGURAÇÃO DE REFERÊNCIA E MOVIMENTO

Seja X a posição, no instante de referência $t = 0$, de uma partícula do corpo. O **movimento** do corpo é a família de funções que dá a posição espacial x dessa partícula em cada instante t :

$$\begin{aligned}x_i &= x_i(X_1, X_2, X_3, t) && \text{(indicial)} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) && \text{(direta)}\end{aligned}$$

As coordenadas (X_1, X_2, X_3) são as **coordenadas materiais** da partícula, e as coordenadas (x_1, x_2, x_3) são as suas **coordenadas espaciais** no instante t .

O rótulo é normalizado pela condição

$$x_i(X_1, X_2, X_3, 0) = X_i \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X},$$

que afirma apenas que, no instante de referência, cada partícula está onde seu rótulo diz.

As duas hipóteses sobre o movimento

Duas hipóteses acompanham a Definição 2.1 em todo o curso, e são ditas aqui uma única vez.

Suavidade. As funções $x_i(\mathbf{X}, t)$ são continuamente diferenciáveis tantas vezes quantas cada passo exigir. É essa hipótese que autoriza derivar o movimento em relação a t , e derivar em relação a $\mathbf{X}$ na sessão seguinte.

Invertibilidade. Para cada t fixo, o mapa $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ é biunívoco: **uma partícula por lugar, um lugar por partícula**. Duas partículas distintas nunca ocupam o mesmo ponto, e nenhuma partícula se parte em duas. Em consequência, o movimento pode ser invertido,

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t),$$

e essa inversa é a ferramenta que permite dizer *qual* partícula está, agora, em um ponto dado. (Ruderman 2019, seç. 3.1)

i Uma hipótese que ainda não foi medida

A invertibilidade está aqui como hipótese qualitativa: o movimento é invertível, e ponto. Ela admite uma **medida quantitativa** — um número que se calcula a partir do movimento e cujo sinal decide se a hipótese vale numa vizinhança. Esse número é construído em **U2.T2**, junto com o objeto que o gera, e é usado nominalmente a partir de U4.T1. Aqui ele não é necessário: nenhum resultado desta sessão precisa de mais do que a hipótese qualitativa.

As duas descrições de um mesmo campo

Seja Φ uma grandeza qualquer definida sobre o corpo: temperatura, densidade, uma componente de velocidade. Ela pode ser apresentada de duas maneiras, e a distinção entre elas é o assunto central desta sessão.

DEFINIÇÃO 2.2 – DESCRIÇÃO MATERIAL E DESCRIÇÃO ESPACIAL

A **descrição material** de Φ é a função $\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t)$: dado o rótulo de uma partícula e um instante, ela devolve o valor de Φ **para aquela partícula**.

A **descrição espacial** de Φ é a função $\Phi(\mathbf{x}, t)$: dado um ponto do espaço e um instante, ela devolve o valor de Φ **para a partícula que ocupa aquele ponto naquele instante**. (Lai, Rubin, e Krempel 2010, seq. 3.2)

O acento circunflexo é o que distingue as duas funções; ele é necessário porque elas são funções diferentes, ainda que descrevam a mesma grandeza física. A ponte entre elas é a composição com o movimento:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(x_1(\mathbf{X}, t), x_2(\mathbf{X}, t), x_3(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{indicial})$$

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{direta})$$

Lida da esquerda para a direita, a igualdade diz: para saber o que a partícula $\mathbf{X}$ sente em t , descubra onde ela está e leia o campo espacial ali. Lida da direita para a esquerda, e usando a inversa do movimento, ela converte uma descrição espacial em material. As duas conversões são usadas o tempo todo.

Dois detalhes da figura merecem atenção, porque nos dois casos o desenho poderia sugerir algo falso.

O primeiro é a **origem única**. Não há dois espaços, um de referência e outro atual: há um só espaço e um só referencial, e o corpo ocupa nele duas regiões diferentes, em dois instantes diferentes. Os vetores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ partem do mesmo ponto O , e é por isso que faz sentido subtraí-los, o que será feito na [Definição 2.6](#).

O segundo é a **forma das regiões**. Elas foram desenhadas convexas e com fronteira poligonal por um motivo: os teoremas que as sessões seguintes aplicam a um corpo — a começar pelo teorema da divergência de U1.T2 — exigem que a fronteira admita normal exterior em quase todo ponto. Uma fronteira poligonal cumpre isso: a normal existe em todos os pontos, exceto nos vértices, que são em número finito. Quinas são, portanto, admissíveis; pontas infinitamente finas e fendas não seriam, e por isso não há nenhuma na figura.

A figura reaparece, sem alterações, em U2.T2 e em U3.T1. Vale reconhecê-la quando ela voltar.

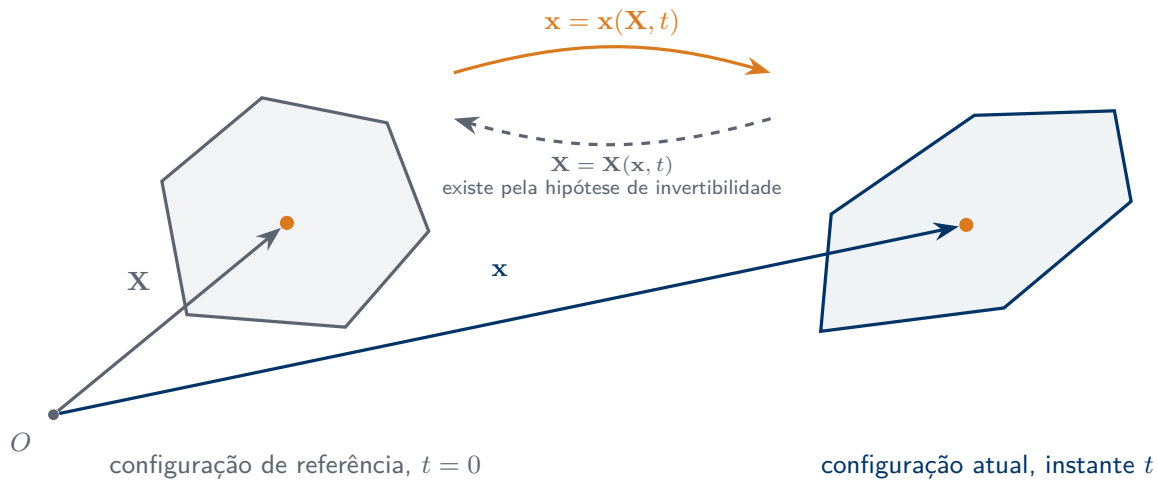


Figura 4: O mesmo corpo em dois instantes, e **uma única origem** O : os vetores X e x são medidos do mesmo ponto. À esquerda, a configuração de referência, onde cada partícula recebe seu rótulo X ; à direita, a configuração atual, onde ela ocupa a posição x . O movimento é a seta de ida, e a hipótese de invertibilidade é a seta de volta. As duas regiões são convexas e têm fronteira poligonal.

Velocidade e aceleração de uma partícula

Com o rótulo material fixo, o movimento é uma curva no espaço, e derivá-la em relação ao tempo é a operação elementar da cinemática do ponto.

DEFINIÇÃO 2.3 – VELOCIDADE E ACELERAÇÃO DE UMA PARTÍCULA

A **velocidade** e a **aceleração** da partícula X são as derivadas parciais do movimento em relação ao tempo, **com X mantido fixo**:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_X, \quad a_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \Big|_X \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_X, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \Big|_X \quad (\text{direta})$$

A notação $|_X$ não é decorativa. Ela registra que a derivada é tomada sobre a **mesma partícula**, e é exatamente essa escolha que a distingue da derivada que um medidor fixo executaria. Toda a sessão gira em torno dessa diferença.

Assim definidas, velocidade e aceleração saem na descrição material: são funções de $(\mathbf{X}, t)$. Mas em mecânica dos fluidos raramente se conhece o movimento $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$; o que se conhece, ou o que se procura, é o **campo de velocidade** $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, na descrição espacial. A próxima seção resolve a tensão entre esses dois fatos.

Origem dos nomes

A descrição espacial é também chamada de **euleriana**, e a material de **lagrangiana** ou de **referência**. (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.2)

Convém não ler esses nomes como atribuição de autoria. Eles são convenções consagradas, e os dois pontos de vista já circulavam na hidrodinâmica do século XVIII. Estas notas não fazem afirmação histórica mais forte do que essa.

A moral não é de erudição, e sim de método: os nomes designam **pontos de vista**, não autores. O que a sessão exige é saber em qual ponto de vista se está a cada linha, e saber trocar de um para o outro sem erro. Por essa razão estas notas usam, sempre que houver risco de ambiguidade, os adjetivos **material** e **espacial**, que dizem o que fazem.

A derivada material

O que se quer calcular

O campo de velocidade de um escoamento é conhecido na descrição espacial: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. O mesmo vale para a temperatura, a densidade e qualquer outra grandeza medida por instrumentos fixos. Uma partícula, porém, não fica num ponto. Se a pergunta é o que **ela** sente, a leitura do campo espacial no seu ponto atual não basta: no instante seguinte ela estará em outro ponto, e o campo ali pode valer outra coisa mesmo que nada varie no tempo.

A operação que se quer é, portanto: tomar um campo espacial, seguir com ele uma partícula, e derivar em relação ao tempo. Ela recebe símbolo próprio.

DEFINIÇÃO 2.4 – DERIVADA MATERIAL

Seja $\Phi(\mathbf{x}, t)$ um campo na descrição espacial e $\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t)$ a sua descrição material. A **derivada material** de Φ é

$$\frac{D\Phi}{Dt} := \left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{igual nas duas notações}),$$

isto é, a taxa de variação de Φ **medida acompanhando a partícula**. (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.3)

Note-se que a definição é imediata na descrição material — ali basta derivar com $\mathbf{X}$ fixo. O que ela não fornece é uma **receita em termos do campo espacial**, que é o que se conhece. Obê-la é o objetivo do que segue.

Derivação guiada

Parte-se da ponte entre as duas descrições e aplica-se a regra da cadeia.

Passo 1. Escreva a descrição material como composição do campo espacial com o movimento:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(x_1(\mathbf{X}, t), x_2(\mathbf{X}, t), x_3(\mathbf{X}, t), t).$$

O lado direito depende de t por dois caminhos: pelo último argumento, e por cada um dos três primeiros.

Passo 2. Derive em relação a t com $\mathbf{X}$ fixo. A regra da cadeia produz um termo por caminho de dependência, e são quatro:

$$\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \left. \frac{\partial x_1}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \left. \frac{\partial x_2}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \left. \frac{\partial x_3}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}.$$

No primeiro termo, as três coordenadas espaciais estão fixas: ele é a derivada que o **medidor fixo** registra.

Passo 3. Os três últimos termos têm a mesma forma, e a soma sobre eles é exatamente a convenção de Einstein em ação:

$$\left. \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left. \frac{\partial x_j}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}.$$

Passo 4. O fator $\partial x_j / \partial t|_{\mathbf{X}}$ já tem nome: pela Definição 2.3, ele é a componente v_j da velocidade da partícula. É aqui que a velocidade entra no cálculo — **por definição**, e não por hipótese adicional. Substituindo, e usando a Definição 2.4 no lado esquerdo, obtêm-se o resultado.

RESULTADO 2.1 – DERIVADA MATERIAL

Para todo campo Φ na descrição espacial, com movimento suave e invertível,

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \partial_t \Phi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \Phi \quad (\text{direta})$$

O Resultado 2.1 vale com Φ escalar, e vale componente a componente com Φ vetorial ou tensorial: a derivação acima não usou nada da natureza de Φ além de sua diferenciabilidade.

Como ler o Resultado 2.1

A igualdade tem dois termos do lado direito, e cada um tem leitura física própria.

O primeiro, $\partial\Phi/\partial t$, é a **variação local**: o que o medidor parafusado na ponte registra. Ele é nulo quando o campo não depende explicitamente do tempo.

O segundo, $v_j \partial\Phi/\partial x_j$, é a **variação advectiva**: a correção devida ao fato de a partícula estar sendo carregada através de uma região onde Φ varia de ponto a ponto. Ele é nulo quando a partícula está parada, e também quando ela se move ao longo de uma direção em que Φ não varia.

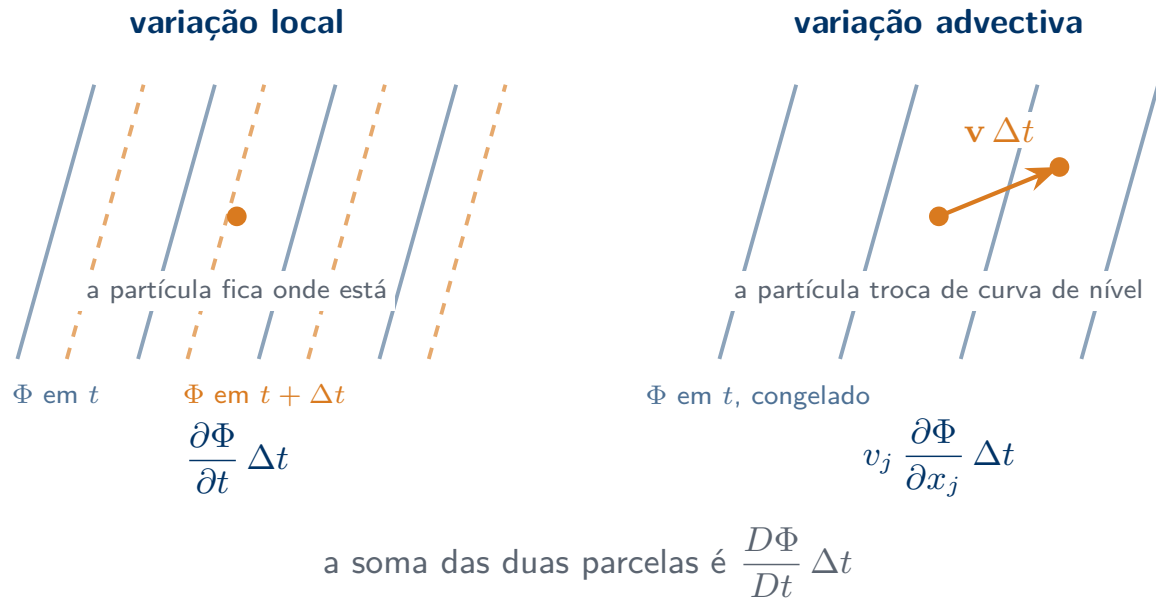


Figura 5: O campo Φ tem gradiente na região. Em um passo de tempo, a partícula sofre a variação que o campo teria mesmo se ela ficasse parada, mais a variação que ela colhe por ter mudado de lugar. A soma das duas é a derivada material.

Isto responde a [pergunta da sessão](#). A leitura do medidor fixo é o primeiro termo; o que a partícula sente é a soma dos dois; e a diferença entre as duas leituras é o termo advectivo. Ele se anula em dois casos, e apenas neles: quando a partícula está parada, e quando ela se move ao longo de uma direção em que Φ não varia.

O rio da abertura, resolvido

A cena da [primeira seção](#) pode agora ser fechada. Aplique o Resultado 2.1 ao campo de temperatura de lá, com $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_1$. As duas parcelas são

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= H - A k U \cos(k(x - Ut)), \\ v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= U \frac{\partial \theta}{\partial x} = GU + A k U \cos(k(x - Ut)),\end{aligned}$$

e a soma delas é

$$\begin{aligned}\frac{D\theta}{Dt} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = H + GU \quad (\text{indicial}) \\ \frac{D\theta}{Dt} &= \partial_t \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = H + GU \quad (\text{direta})\end{aligned}$$

O resultado é **constante**, em todo ponto e em todo instante — e é exatamente a inclinação $GU + H$ do registro da boia, obtida na primeira seção por outro caminho, sem derivada material alguma.

Vale reparar no que se cancelou. Cada uma das duas parcelas **oscila**, com a mesma amplitude $A k U$ e sinais opostos. Num ponto fixo do rio, portanto, nem a variação local nem a advectiva são constantes; a soma das duas é. O que a partícula sente é mais simples do que qualquer das duas causas isoladas.

As duas parcelas assumem valores particularmente simples ao longo da trajetória de uma boia que parta de uma **crista** da perturbação, onde o cosseno se anula: ali a variação local vale H e a advectiva vale GU , as duas constantes. É o caso desenhado na figura da abertura.

O caso $\Phi = \mathbf{v}$: aceleração em coordenadas espaciais

O caso mais usado do Resultado 2.1 é aquele em que o campo derivado é a própria velocidade. Aplicando o resultado a cada componente v_i do campo espacial de velocidade, e observando que $\partial \hat{v}_i / \partial t|_{\mathbf{x}} = a_i$ pela Definição 2.3, obtém-se a aceleração de uma partícula escrita **inteiramente em termos do campo espacial**.

RESULTADO 2.2 – ACELERAÇÃO EM COORDENADAS ESPACIAIS

Se o campo de velocidade é conhecido na descrição espacial, a aceleração da partícula que ocupa o ponto $\mathbf{x}$ no instante t é

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{direta})$$

Este é o resultado que torna a mecânica dos fluidos possível na descrição espacial: ele fecha o cálculo da aceleração sem exigir que se conheça o movimento $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, que quase nunca se conhece.

! O termo que carrega a dificuldade

O segundo termo, $v_j \partial v_i / \partial x_j$, é **quadrático em $\mathbf{v}$** : a velocidade aparece nele duas vezes, uma como fator e outra dentro da derivada. Um campo de velocidade que seja soma de duas soluções não produz, por isso, uma aceleração que seja a soma das duas acelerações.

Este único termo é a origem da não linearidade das equações de movimento dos fluidos. Ele é o lado esquerdo, ainda sem forças, da equação que aparece em **U6.T1**; o formato foi antecipado em L1 como exemplo de canônico duplo, e volta lá idêntico. A partir daqui, toda dificuldade analítica e numérica do curso que não vier da geometria vem deste termo.

Duas lacunas, deliberadamente abertas

A derivação acima usou duas hipóteses sem verificá-las, e vale dizer quais são.

1. A regra da cadeia do Passo 2 exige que Φ seja diferenciável nas quatro variáveis e que o movimento seja diferenciável em t .
2. Para que o resultado seja útil como fórmula espacial, é preciso poder ir de $\mathbf{x}$ para $\mathbf{X}$ — isto é, usar a **inversa** do movimento. A derivada foi tomada com $\mathbf{X}$ fixo; é a inversa que diz qual partícula ocupa o ponto $\mathbf{x}$ no instante t , e portanto o que o resultado significa quando lido como campo em $(\mathbf{x}, t)$.

As duas lacunas são fechadas no item (a) de **PS1.5**, num caso concreto e com roteiro. Elas não são detalhe técnico: um movimento que perde a invertibilidade num instante é um movimento em que a descrição espacial deixa de fazer sentido naquele instante.

O campo-exemplo da Unidade 2

Todo o restante desta sessão, e o bloco correspondente de U2.T2, usam um único campo de velocidade. Ele é fixado aqui, com nome, para poder ser citado depois.

Considere o campo de velocidade plano

$$v_1 = \alpha x_2, \quad v_2 = \beta t, \quad v_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \alpha x_2 \mathbf{e}_1 + \beta t \mathbf{e}_2,$$

com constantes $\alpha > 0$, de dimensão de inverso de tempo, e $\beta > 0$, de dimensão de aceleração. O campo está definido em todo o plano (x_1, x_2) e para $t \geq 0$.

Ele é o cisalhamento simples de (Lai, Rubin, e Krempl 2010, Ex. 3.1.1) acrescido de um arraste transversal que cresce com o tempo. O primeiro termo faz camadas horizontais deslizarem umas sobre as outras; o segundo empurra todo o material para cima, cada vez mais depressa.

O campo **depende explicitamente de t** , através de v_2 . Essa é a propriedade que o torna útil aqui: com ela, os dois retratos da próxima seção saem visivelmente diferentes.

A aceleração, componente a componente

Aplique o Resultado 2.2. Na forma indicial, escrevendo a soma em j por extenso:

$$\begin{aligned} a_1 &= \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}}_0 + v_1 \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}}_0 + v_2 \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}}_\alpha = \beta t \cdot \alpha = \alpha \beta t, \\ a_2 &= \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial t}}_\beta + v_1 \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}}_0 + v_2 \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}_0 = \beta, \quad a_3 = 0. \end{aligned}$$

Na forma direta, o mesmo cálculo em duas parcelas:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} &= \beta \mathbf{e}_2, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left(\alpha x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta t \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (\alpha x_2 \mathbf{e}_1 + \beta t \mathbf{e}_2) = \alpha \beta t \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

de modo que $\mathbf{a} = \alpha \beta t \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2$. As duas contas coincidem, como devem. Escrever nas duas notações não é redundância burocrática: é uma verificação barata, que apanha erro de índice.

i O exemplo responde à pergunta da sessão

Repare na primeira componente. A velocidade $v_1 = \alpha x_2$ **não depende do tempo**: um medidor fixo num ponto qualquer registra sempre o mesmo v_1 , e conclui que nada acelera na direção x_1 .

E, no entanto, $a_1 = \alpha\beta t \neq 0$ para $t > 0$. As partículas **aceleram** nessa direção, porque o arraste transversal as leva continuamente para camadas mais altas, onde v_1 é maior. A aceleração está inteiramente no termo advectivo. O medidor fixo e a partícula discordam, e o Resultado 2.1 diz exatamente por quanto.

O movimento correspondente

O campo-exemplo é simples o bastante para que o movimento possa ser obtido em forma fechada, o que permite conferir tudo por um segundo caminho.

Uma partícula rotulada $\mathbf{X}$ satisfaz $\partial x_i / \partial t|_{\mathbf{X}} = v_i(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ em $t = 0$. A segunda equação não envolve x_1 e integra-se de imediato; a primeira usa o resultado da segunda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{X}} &= \beta t \implies x_2 = X_2 + \frac{1}{2}\beta t^2, \\ \frac{\partial x_1}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{X}} &= \alpha x_2 = \alpha \left(X_2 + \frac{1}{2}\beta t^2 \right) \\ \implies x_1 &= X_1 + \alpha X_2 t + \frac{1}{6}\alpha\beta t^3.\end{aligned}$$

O movimento é, portanto,

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 t + \frac{1}{6}\alpha\beta t^3, \quad x_2 = X_2 + \frac{1}{2}\beta t^2, \quad x_3 = X_3,$$

e ele é invertível para todo t , com inversa

$$X_1 = x_1 - \alpha t x_2 + \frac{1}{3}\alpha\beta t^3, \quad X_2 = x_2 - \frac{1}{2}\beta t^2, \quad X_3 = x_3.$$

A verificação. Derivando o movimento duas vezes em relação a t com $\mathbf{X}$ fixo, como manda a Definição 2.3,

$$a_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}\bigg|_{\mathbf{X}} = \alpha\beta t, \quad a_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}\bigg|_{\mathbf{X}} = \beta.$$

São os mesmos valores obtidos pelo Resultado 2.2, por um caminho independente: o primeiro cálculo partiu do campo espacial e nunca viu o movimento; o segundo partiu do movimento e nunca viu o Resultado 2.2.

Linhas de corrente e trajetórias

Um escoamento pode ser desenhado de duas maneiras, e as duas figuras são diferentes. Esta seção define as duas curvas, dá o critério exato para que elas coincidam, e mostra as duas famílias para o campo-exemplo.

DEFINIÇÃO 2.5 – TRAJETÓRIA E LINHA DE CORRENTE

A **trajetória** da partícula que está em $\mathbf{x}_0$ no instante t_0 é a curva percorrida por essa partícula à medida que o tempo corre.

A **linha de corrente** do instante t_0 que passa por $\mathbf{x}_0$ é a curva que, em cada um de seus pontos, é tangente ao campo de velocidade **congelado** naquele instante. (Ruderman 2019, seq. 3.2)

As duas curvas são soluções de problemas de valor inicial, e a diferença entre elas está inteiramente no papel de t :

$$\begin{array}{ll} \frac{dx_i}{dt} = v_i(\mathbf{x}, t), & \frac{dx_i}{ds} = v_i(\mathbf{x}, t_0) \quad (\text{indicial}) \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), & \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) \quad (\text{direta}) \end{array}$$

À esquerda, a trajetória: t é a **variável independente**, e o tempo corre de verdade. À direita, a linha de corrente: t_0 é um **parâmetro fixo**, o tempo está congelado, e a curva é percorrida por um parâmetro auxiliar s que não é tempo. Um instante diferente produz, em geral, uma família diferente de linhas de corrente.

i Aqui d/dt é legítimo

As duas equações acima usam d/dt e d/ds , e não D/Dt . Isso é correto: a incógnita $\mathbf{x}(t)$ é a posição de **uma** partícula, uma função só de t , e não um campo definido em todos os pontos do espaço. Onde não há dependência espacial, não há ambiguidade a resolver, e a derivada ordinária basta. A regra completa está na [nota sobre \$d/dt\$ e \$D/Dt\$](#) .

Quando as duas famílias coincidem

RESULTADO 2.3 – CRITÉRIO DE COINCIDÊNCIA

Suponha que exista um campo vetorial $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, **independente do tempo**, e um campo escalar $f(\mathbf{x}, t) > 0$ tais que

$$v_i(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Então as linhas de corrente de qualquer instante coincidem, como curvas, com as trajetórias.

Em particular, isso vale sempre que o escoamento é **estacionário**, isto é, sempre que $\partial_t \mathbf{v} = 0$.

Demonstração. Sob a hipótese, o campo de velocidade tem, em cada ponto, uma direção que não depende de t : a direção de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. A trajetória resolve $d\mathbf{x}/dt = f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x})$ e a linha de corrente do instante t_0 resolve $d\mathbf{x}/ds = f(\mathbf{x}, t_0) \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Em ambos os casos o vetor tangente é paralelo a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ no ponto, com o mesmo sentido, pois $f > 0$. Duas curvas que passam pelo mesmo ponto e têm em cada ponto a mesma direção tangente são a mesma curva; o que difere entre as duas é apenas a velocidade com que são percorridas, isto é, a parametrização. O caso estacionário é o caso $f \equiv 1$ e $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. ■

A recíproca deve ser lida com cuidado: um escoamento não estacionário **pode** ter as duas famílias coincidentes, e o critério acima diz exatamente quando — quando a dependência temporal altera apenas o *módulo* da velocidade, nunca a sua direção. O que não pode acontecer é a direção do campo mudar com o tempo em algum ponto e as duas famílias ainda assim coincidirem.

As duas famílias para o campo-exemplo

O campo-exemplo **não** satisfaz o critério. No ponto (x_1, x_2) com $x_2 \neq 0$, o vetor velocidade é $(\alpha x_2, \beta t)$, cuja direção muda com t : em t pequeno ele é quase horizontal, e à medida que t cresce ele se inclina para cima. Logo as duas famílias são distintas, e vale desenhá-las.

Trajetórias. Já foram obtidas na [seção anterior](#): a partícula $\mathbf{X}$ percorre

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 t + \frac{1}{6} \alpha \beta t^3, \quad x_2 = X_2 + \frac{1}{2} \beta t^2.$$

São curvas cúbicas no parâmetro t .

Linhas de corrente. Congele o instante em $t_0 > 0$ e resolva

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha x_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = \beta t_0.$$

A segunda dá $x_2 = x_2^0 + \beta t_0 s$; levando na primeira e integrando,

$$x_1 = x_1^0 + \alpha \left(x_2^0 s + \frac{1}{2} \beta t_0 s^2 \right).$$

Eliminando s entre as duas obtém-se a forma fechada da linha de corrente que passa por (x_1^0, x_2^0) no instante t_0 :

$$x_1 = x_1^0 + \frac{\alpha}{2\beta t_0} \left[x_2^2 - (x_2^0)^2 \right].$$

São parábolas, e a sua abertura depende do instante t_0 escolhido: quanto mais tarde se congela o relógio, mais fechada é a parábola.

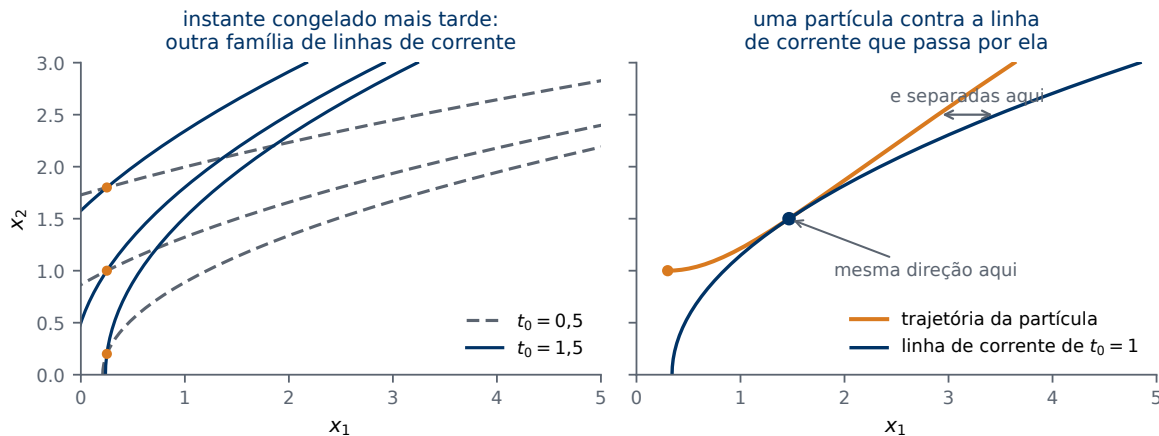


Figura 6: À esquerda, as linhas de corrente de dois instantes distintos: congelar o relógio mais tarde produz outra família. À direita, as trajetórias de quatro partículas, sobrepostas às linhas de corrente do instante intermediário. As duas famílias não coincidem, e a discrepância cresce com o tempo.

🔥 O erro que esta distinção previne

Visualizações de escoamento — experimentais ou numéricas — quase sempre desenhavam **linhas de corrente**, porque elas se obtêm de um único instante do campo. Já o material transportado segue **trajetórias**. Em escoamento não estacionário, ler uma figura de linhas de corrente como se ela mostrasse por onde o material passou é uma conclusão errada, e é um erro recorrente.

As duas famílias voltam a aparecer em **U5.T1**, onde o teorema de Bernoulli é enunciado ao longo de linhas de corrente de escoamento estacionário — hipótese sob a qual, pelo Resultado 2.3, a distinção desaparece.

Estudo complementar, não avaliado. (Ruderman 2019), problemas **3.1**, **3.2** e **3.6**. O 3.1 pede a interpretação geométrica de um movimento dado; o 3.2 percorre exatamente o caminho desta sessão — velocidade nas duas descrições, e a verificação de que $D\mathbf{v}/Dt = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$; o 3.6 é o problema das duas famílias de curvas, num campo plano não estacionário. As soluções completas encontram-se no próprio livro; por essa razão tais problemas são indicados como estudo dirigido e não como exercícios avaliados.

Deslocamento e movimento rígido

O campo de deslocamento

DEFINIÇÃO 2.6 – CAMPO DE DESLOCAMENTO

O **deslocamento** da partícula $\mathbf{X}$ no instante t é o vetor que liga a sua posição de referência à sua posição atual:

$$u_i = x_i - X_i \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

(Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.5)

O deslocamento é a mesma informação do movimento, escrita como diferença em vez de posição. Ele é o objeto natural quando os deslocamentos são pequenos, e é nessa condição que ele assume protagonismo, em **U2.T2**. Para o campo-exemplo,

$$u_1 = \alpha X_2 t + \frac{1}{6} \alpha \beta t^3, \quad u_2 = \frac{1}{2} \beta t^2, \quad u_3 = 0.$$

Movimento rígido

Um movimento é **rígido** quando a distância entre duas partículas quaisquer do corpo não muda com o tempo. Movimentos rígidos admitem uma forma fechada, que vale para todo o corpo e para todo t .

RESULTADO 2.4 – EQUAÇÃO CINEMÁTICA DO MOVIMENTO RÍGIDO

Todo movimento rígido tem a forma

$$x_i(t) = c_i(t) + R_{ij}(t) [X_j - c_j(0)] \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t) [\mathbf{X} - \mathbf{c}(0)] \quad (\text{direta})$$

Aqui $\mathbf{c}(t)$ é a posição, no instante t , da partícula que ocupava $\mathbf{c}(0)$ na configuração de referência, e $\mathbf{R}(t)$ é um tensor **ortogonal próprio** — isto é, uma rotação, com $\det \mathbf{R} = +1$ — para cada t , e $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$. (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.6)

O qualificativo **próprio** não é decorativo. Um tensor ortogonal com determinante -1 também preserva comprimentos e ângulos, mas leva o corpo na sua imagem especular, o que nenhum movimento realiza. Aqui ele está descartado de graça: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$ tem determinante $+1$, e o determinante varia continuamente com t sem poder assumir valores entre -1 e $+1$.

A recíproca — todo movimento dessa forma preserva as distâncias — é o exercício resolvido em (Lai, Rubin, e Kreml 2010, Ex. 3.6.1). A implicação direta, que é a enunciada acima, é um resultado clássico sobre aplicações que preservam distâncias no espaço euclidiano, e não é demonstrada nesta sessão.

A leitura da fórmula é direta: o primeiro termo desloca o corpo inteiro sem girá-lo, e o segundo gira o corpo em torno da partícula de referência. Que essas duas operações esgotem os movimentos rígidos é o conteúdo do Resultado 2.4.

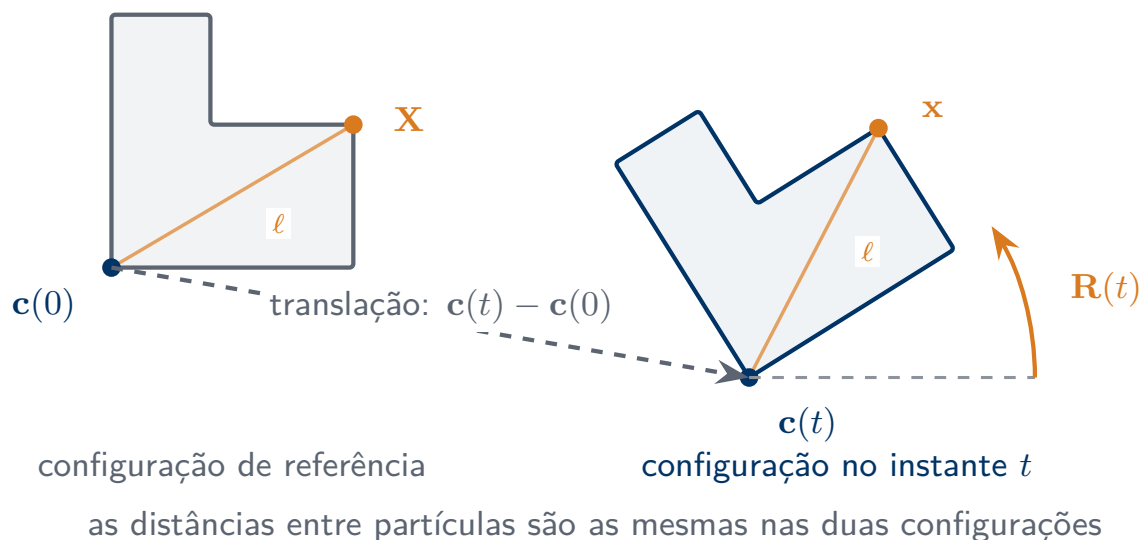


Figura 7: Um movimento rígido decompõe-se em uma translação, que leva a partícula de referência de $c(0)$ a $c(t)$, e uma rotação $R(t)$ do corpo em torno dela. As distâncias entre partículas são as mesmas nas duas configurações.

i Tudo o que esta fórmula exige já foi demonstrado

A palavra “ortogonal” carrega aqui todo o peso: é ela que garante que $R(t)$ preserve comprimentos e ângulos, e portanto que a fórmula descreva mesmo um movimento rígido. As propriedades usadas — $Q Q^T = I$, a preservação do produto escalar e $\det Q = \pm 1$ — foram estabelecidas em **U1.T1**. Nada de novo é necessário.

Repare também que $c(t)$ e $R(t)$ são funções **só do tempo**. Derivá-las com d/dt é legítimo, pelo mesmo motivo da nota da seção anterior.

PERGUNTA PARA A PRÓXIMA SESSÃO

Que campo de velocidade um movimento rígido gera, e o que distingue esse campo do campo-exemplo desta sessão?

A resposta é o assunto central de **U2.T2**. Nesta sessão seguimos **uma** partícula de cada vez; a próxima olha a **vizinhança** de uma partícula, e é dessa mudança de foco que a resposta sai.

Nota sobre d/dt e D/Dt

O curso inteiro obedece à regra seguinte, e ela vale a partir desta sessão.

Use D/Dt sempre que o objeto derivado for um **campo na descrição espacial** — algo que dependa de $(\mathbf{x}, t)$. Nesse caso a expressão “derivada em relação ao tempo” é ambígua até que se diga o que fica fixo, e o símbolo D/Dt é a declaração de que fica fixa a **partícula**, não o ponto. A alternativa, fixar o ponto, tem símbolo próprio: $\partial/\partial t$.

Use d/dt apenas quando o objeto derivado for função **só do tempo**. São exemplos, nesta sessão: a posição $\mathbf{x}(t)$ de uma partícula ao longo de sua trajetória, e as funções $\mathbf{c}(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ do movimento rígido. Não há campo, não há ponto a fixar, e não há ambiguidade.

Escrever $d\Phi/dt$ para um campo espacial é, neste curso, um erro de notação, e não uma abreviação aceitável — porque a expressão não determina qual das duas derivadas se pretende.

Exercícios propostos

PS1.5 – DESCRIÇÕES, DERIVADA MATERIAL E AS DUAS FAMÍLIAS DE CURVAS

Considere o campo de velocidade plano

$$v_1 = U_0 (1 + \lambda t), \quad v_2 = \gamma x_1, \quad v_3 = 0,$$

com $U_0 > 0$, $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$ constantes, e $t \geq 0$.

(a) As lacunas da derivação. Obtenha o movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ integrando $\partial x_i / \partial t|_{\mathbf{x}} = v_i$ com $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ em $t = 0$. *Sugestão:* a equação de x_1 não envolve x_2 ; resolva-a primeiro. Em seguida, exiba explicitamente a inversa $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ e verifique que ela existe para **todo** $t \geq 0$. Identifique em qual passo da derivação do Resultado 2.1 essa inversa é usada.

(b) Da descrição material para a espacial. Escreva a velocidade na descrição material, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$, derivando o movimento obtido em (a). Depois, usando a inversa, converta-a de volta e confirme que o resultado é o campo espacial dado no enunciado.

(c) A aceleração por dois caminhos. Calcule $\mathbf{a}$ pelo Resultado 2.2, componente a componente na notação indicial, e confira compactando na notação direta. Em seguida calcule $\mathbf{a}$ de novo, derivando duas vezes o movimento de (a) com $\mathbf{X}$ fixo. Os dois resultados devem coincidir; se não coincidirem, indique em qual passo está o erro.

- (d) Um campo transportado.** A temperatura do meio é $\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0 + G x_2$, com θ_0 e G constantes. O papel de G aqui é o mesmo da cena de abertura — um gradiente fixo de temperatura — agora ao longo de x_2 . Calcule $D\theta/Dt$. Explique, em uma frase, por que um termômetro parado não registra variação alguma enquanto uma partícula registra.
- (e) As duas famílias.** Para um instante $t_0 > 0$ fixo, obtenha as linhas de corrente em forma fechada, e compare-as com as trajetórias que você já tem de (a). Depois use o Resultado 2.3 para decidir onde as duas famílias coincidem e onde não coincidem. *Atenção:* a resposta não é a mesma em todo o plano — examine separadamente os pontos com $x_1 \neq 0$ e os pontos da reta $x_1 = 0$, e diga o que distingue os dois casos.
- (f) Verificação numérica.** Com numpy, integre numericamente a trajetória de uma partícula a partir de $\mathbf{X} = (1, 1, 0)$, com $U_0 = \lambda = \gamma = 1$, até $t = 2$, e compare com o movimento em forma fechada obtido em (a). Informe a diferença máxima e comente sua ordem de grandeza. Desenhe, na mesma figura, essa trajetória e a linha de corrente que passa pela posição da partícula no instante $t_0 = 1$.

Esta é a única lista atribuída nesta sessão. O enunciado consolidado da PS1, com todos os itens de U1 e U2, é fechado em U2.T2.

Referências

- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Kreml. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4ª ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.