

U2.T2 — Deformação, taxa de deformação e spin

Sessão U2.T2 · data: ver calendar-map

[Slides](#) [Slides PDF](#) [Notas PDF](#)

A sessão anterior descreveu **uma** partícula: onde ela está, com que velocidade se move, e o que ela sente quando um campo varia ao seu redor. Esta sessão muda o foco para a **vizinhança** dessa partícula. A pergunta é o que acontece com um pedacinho de matéria em torno de um ponto: ele estica, gira, muda de forma?

A resposta inteira está contida em um único objeto, o gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{v}$, e a sessão é a anatomia dele. Ao final teremos separado o movimento local em três partes independentes, teremos fechado o item da ementa sobre corpos rígidos, e teremos enunciado — sem demonstrar — a primeira lei de conservação do curso.

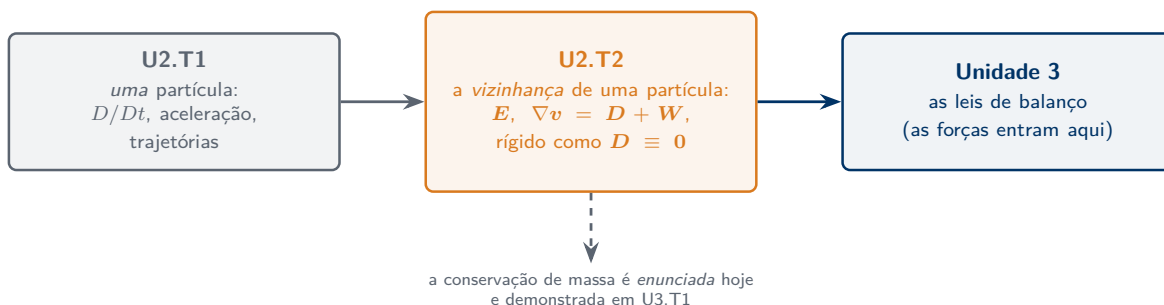


Figura 1: Onde esta sessão fica: U2.T1 descreveu uma partícula; U2.T2 descreve a vizinhança dela; as leis de balanço da Unidade 3 são escritas com os objetos construídos aqui.

A vizinhança de um ponto

Toda esta sessão repousa sobre um único enunciado de cálculo, e vale enunciá-lo uma vez, para um campo qualquer, antes de aplicá-lo. Seja f um campo vetorial diferenciável. Fixe um ponto e considere um segundo ponto a uma distância pequena dele. Os valores de f nos dois pontos não são os mesmos, e a diferença entre eles é o objeto de estudo.

$$f_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{f}) d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{direta})$$

O tensor $\nabla \mathbf{f}$, de componentes $\partial f_i / \partial x_j$, é o **gradiente** do campo, definido em [U1.T2](#).

O enunciado acima **não escolhe descrição**. Ele vale para um campo de qualquer variável: o que muda de uma aplicação para outra é a variável em que se deriva, e essa escolha tem de estar sempre explícita. Esta sessão aplica o enunciado duas vezes, com duas escolhas diferentes.

Campo	Descrição	Deriva-se em	O que sai dele
deslocamento $\mathbf{u}$	material	$\mathbf{X}$	o tensor de deformação infinitesimal $\mathbf{E}$
velocidade $\mathbf{v}$	espacial	$\mathbf{x}$	a taxa de deformação $\mathbf{D}$ e o spin $\mathbf{W}$

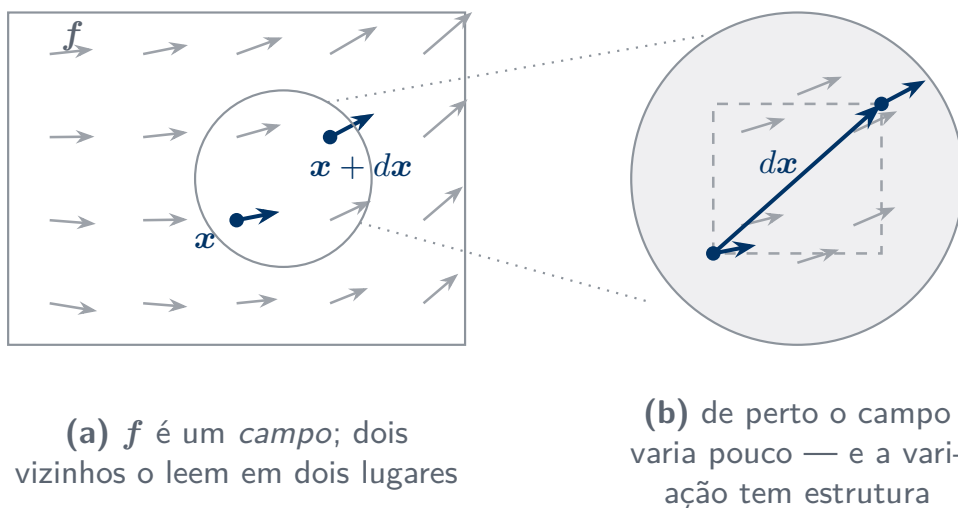
As duas descrições foram definidas em [U2.T1](#): a material segue a partícula pelo seu rótulo $\mathbf{X}$; a espacial fica no lugar $\mathbf{x}$ e vê o material passar.

Por que o resto é de segunda ordem

A parcela $O(|d\mathbf{x}|^2)$ não é um enfeite de notação, e o painel (d) da Figura 3 a desenha. No campo daquele desenho, com o $d\mathbf{x}$ ali marcado, o resto vale 16,7% da parcela linear — porque $|d\mathbf{x}|$ vale mais de um quarto da largura do domínio, e não há nada de pequeno nele.

O que faz do resto um termo de **segunda** ordem é o modo como ele encolhe. Repetindo a medida com o mesmo campo e o mesmo ponto, para $d\mathbf{x}$ cada vez menores:

Fração de $ d\mathbf{x} $	resto / parcela linear
1	16,7%
1/2	8,3%
1/4	4,2%
1/8	2,1%



As duas leituras de f não são iguais. A diferença entre elas é o objeto desta sessão.

Figura 2: f é um campo, e dois pontos vizinhos o leem em dois lugares próximos; ampliada, a vizinhança mostra um campo que varia pouco.

Cada vez que $|d\mathbf{x}|$ cai pela metade, a razão cai pela metade também. É isso que autoriza desprezar o resto no limite, e é só isso: o resto não some, ele fica desprezível **em comparação com** a parcela linear.

A parcela que interessa

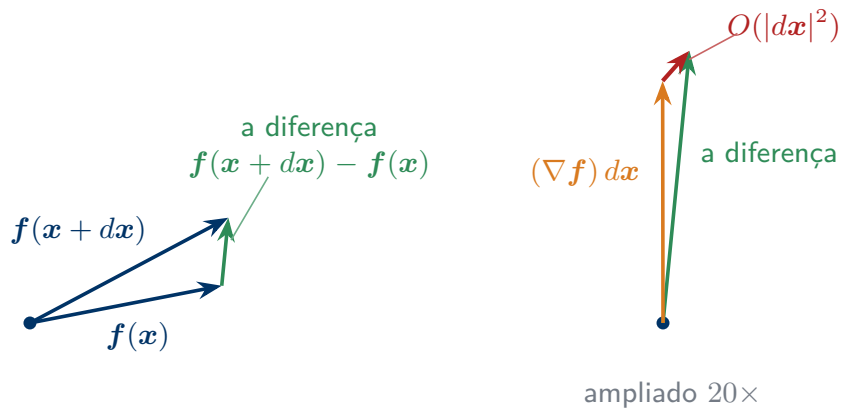
Aplicando o enunciado ao campo de velocidade, na descrição espacial:

$$v_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = v_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} + O(|d\mathbf{x}|^2) \quad (\text{direta})$$

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

O primeiro termo é comum a toda a vizinhança: é a velocidade da própria partícula de referência. Tudo o que distingue o vizinho da partícula está na parcela $(\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x}$.



(c) as duas leituras, da mesma origem, e a diferença entre elas

(d) a diferença tem duas parcelas: a linear e o resto

$f(x+dx) = f(x) + (\nabla f) dx + O(|dx|^2)$. Neste desenho o resto vale 16,7% da parcela linear, porque dx é grande; reduzindo $|dx|$ pela metade, essa fração cai pela metade.

Figura 3: As duas leituras, postas na mesma origem, deixam ver a diferença entre elas; e essa diferença, ampliada, tem duas parcelas — a linear $(\nabla f) dx$ e o resto. As cores valem nas duas figuras: azul são as leituras de f , verde é a diferença, laranja é a parcela linear, vermelho é o resto.

PERGUNTA DA SESSÃO

O que $\nabla \mathbf{v}$ sabe sobre o movimento da vizinhança de um ponto?

A resposta é o Resultado 2.9: a parcela $(\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x}$ se separa em uma rotação rígida e um estiramento puro. A separação é **única**, e cada uma das duas partes pode assumir qualquer valor sem restringir a outra.

Antes de chegar lá, a próxima seção faz a **primeira** das duas aplicações da tabela acima — a do campo de deslocamento, na descrição material. O que ela constrói é o gêmeo estático do que vem depois.

Deformação infinitesimal

Esta é a **primeira aplicação** do enunciado da §A vizinhança de um ponto, e ela é feita na **descrição material**: o campo é o deslocamento $\mathbf{u}$, e as derivadas são tomadas nas coordenadas $\mathbf{X}$ que rotulam as partículas.

O campo de deslocamento foi definido em U2.T1: ele leva a posição de referência $\mathbf{X}$ de uma partícula à sua posição atual, por $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$. Tomando $\mathbf{f} = \mathbf{u}$ no enunciado geral, um elemento material $d\mathbf{X}$ da configuração de referência vira, na configuração atual,

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) d\mathbf{X},$$

onde $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}$ é o **gradiente de deslocamento**, um tensor de segunda ordem (Lai, Rubin, e Krepl 2010, seq. 3.7). O índice $\mathbf{X}$ registra que as derivadas são tomadas nas coordenadas materiais.

Esta seção trata do regime em que **tanto o deslocamento quanto as suas derivadas são pequenos**. É a hipótese da *deformação infinitesimal*, e ela é a que sustenta a elasticidade linear. Nela, a distinção entre derivar em $\mathbf{X}$ e derivar em $\mathbf{x}$ produz uma diferença de segunda ordem, que é desprezada junto com as demais.

O tensor que mede a mudança de forma

O gradiente de deslocamento se decompõe, como qualquer tensor de segunda ordem, em uma parte simétrica e uma parte antissimétrica (U1.T2). A parte antissimétrica descreve uma rotação infinitesimal e não altera comprimento algum. Resta a parte simétrica, e é ela que mede a mudança de forma.

DEFINIÇÃO 2.7 – TENSOR DE DEFORMAÇÃO INFINITESIMAL

O **tensor de deformação infinitesimal** $\mathbf{E}$ é a parte simétrica do gradiente de deslocamento:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T) \quad (\text{direta})$$

Ele é simétrico por construção, e tem portanto seis componentes independentes. (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.7; Ruderman 2019, seq. 3.4)

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

A escolha da parte simétrica não é estética. Pelo exercício [PS1.2](#), proposto em U1.T1, a decomposição de um tensor em parte simétrica mais parte antissimétrica é **única**. Existe, então, uma única parcela candidata a medir forma, e é essa que $\mathbf{E}$ isola.

O que cada componente mede

As componentes de $\mathbf{E}$ têm significado geométrico direto, e vale a pena enunciá-lo com precisão, porque o fator 2 do segundo item é fonte permanente de erro de sinal e de escala.

RESULTADO 2.5 – SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS COMPONENTES

Seja $\mathbf{E}$ o tensor de deformação infinitesimal em um ponto.

1. Para um elemento material que estava na direção unitária $\mathbf{n}$, o **alongamento por unidade de comprimento** vale

$$\frac{ds - dS}{dS} = n_i E_{ij} n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}$$

— igual nas duas notações, e escrita nas duas. Em particular, E_{11} , E_{22} e E_{33} são os alongamentos relativos nas direções $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

2. Para dois elementos que estavam nas direções perpendiculares $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, o **decrêscimo do ângulo entre eles** vale $2E_{12}$. O mesmo vale para os pares $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ e $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, com $2E_{13}$ e $2E_{23}$.

(Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.8)

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

O item 2 merece a leitura literal: E_{12} é **metade** do ângulo perdido. Uma grandeza chamada “deformação de cisalhamento” aparece na literatura tanto como E_{12} quanto como $2E_{12}$, e as

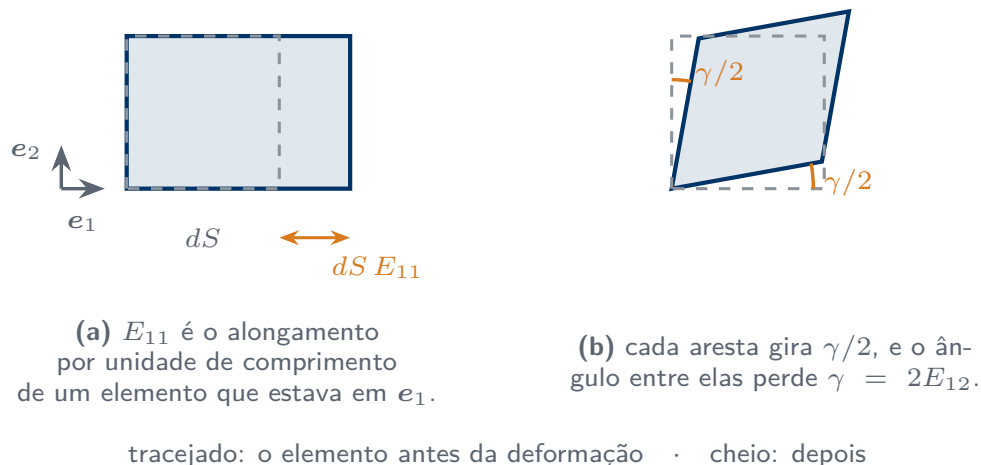


Figura 4: Os dois significados do Resultado 2.5. Em (a), a componente diagonal é o alongamento relativo. Em (b), o dobro da componente fora da diagonal é o ângulo perdido — a componente sozinha é metade dele.

duas convivem. Neste curso vale sempre a do Resultado 2.5.

Um caso em números. Tome o deslocamento

$$u_1 = \gamma X_2, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

com γ pequeno. A única derivada não nula é $\partial u_1 / \partial X_2 = \gamma$, e portanto

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leia a matriz pelo Resultado 2.5: as diagonais são nulas, logo nenhum elemento ao longo dos eixos muda de comprimento; e $2E_{12} = \gamma$, logo o ângulo entre os eixos e_1 e e_2 diminui de γ . A dilatação é $\text{tr } \mathbf{E} = 0$: a forma muda, o volume não.

Guarde a forma desta matriz. Ela reaparece, com $\mathbf{D}$ no lugar de $\mathbf{E}$ e α no lugar de γ , quando a [§O campo-exemplo da unidade, revisitado](#) desmontar o campo da unidade. É esse o sentido em que a próxima seção é uma releitura desta.

Dilatação

Falta uma pergunta de volume: em quanto cresce um elemento material?

RESULTADO 2.6 – DILATAÇÃO

A variação relativa de volume de um elemento material, no regime infinitesimal, é o primeiro invariante de $\mathbf{E}$:

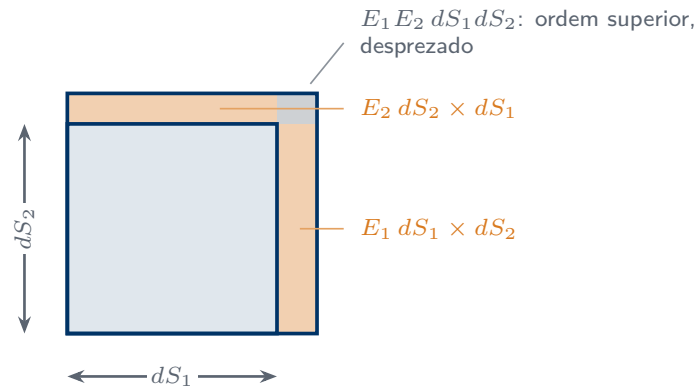
$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = E_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{\Delta(dV)}{dV} = \text{tr } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{u} \quad (\text{direta})$$

Esta grandeza se chama **dilatação**. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.10)

Descrição material — as derivadas são tomadas em $\mathbf{X}$.

O argumento é geométrico e cabe em uma figura. Tome as três direções principais de $\mathbf{E}$ em um ponto — elas existem e são mutuamente perpendiculares porque $\mathbf{E}$ é simétrico (U1.T2). Nelas o elemento só estica, com fatores $1 + E_1$, $1 + E_2$ e $1 + E_3$, em que E_1 , E_2 e E_3 são os autovalores. O volume novo é o produto dos três fatores, e o produto vale $1 + E_1 + E_2 + E_3$ mais termos de ordem superior, que a hipótese infinitesimal descarta.



A área ganha, dividida pela área original, vale $E_1 + E_2$ a menos de termos de ordem superior. Em três dimensões, $E_1 + E_2 + E_3 = \text{tr } \mathbf{E}$.

Figura 5: O acréscimo de volume é a soma dos alongamentos principais. O quadradinho cinza do canto é o termo de ordem superior, o único que a hipótese infinitesimal descarta.

Como o primeiro invariante não muda com a base (PS1.4), a dilatação é a mesma calculada em qualquer sistema de coordenadas. Isso era necessário: o volume de um pedaço de matéria não pode depender de quem o mede.

O gradiente de velocidade e sua decomposição

Esta é a **segunda aplicação** do mesmo enunciado, agora na **descrição espacial**: o campo é a velocidade $\mathbf{v}$, e as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$. Os objetos que saem dela têm uma diferença essencial em relação aos da seção anterior: eles são **taxas**, medidas por unidade de tempo, e valem para deformações de qualquer tamanho, não apenas para as infinitesimais.

A ponte entre as duas leituras é a taxa de variação de um elemento material. Derivando $d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ em relação ao tempo, com $\mathbf{X}$ fixo, e usando a derivada material do Resultado 2.1 de [U2.T1](#):

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(dx_i) &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{indicial}) \\ \frac{D}{Dt}(d\mathbf{x}) &= (\nabla \mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (\text{direta})\end{aligned}$$

Ou seja: $\nabla \mathbf{v}$ é o operador que diz com que velocidade cada elemento material muda de comprimento e de direção (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.12). É o mesmo tensor da expansão de Taylor da [§A parcela que interessa](#), lido agora como taxa.

As duas parcelas

RESULTADO 2.7 – DECOMPOSIÇÃO DO GRADIENTE DE VELOCIDADE

O gradiente de velocidade se escreve, de modo único, como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + W_{ij} \quad (\text{indicial})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (\text{direta})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T \right)$$

$\mathbf{D}$ chama-se **tensor taxa de deformação** e $\mathbf{W}$ chama-se **tensor spin**. (Lai, Rubin, e Krempf 2010, seq. 3.13; Ruderman 2019, seq. 3.5–3.6)

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

A unicidade da decomposição é o item (b) de PS1.2, e é o que autoriza falar de “a” parte simétrica e “a” parte antissimétrica. Os nomes das duas parcelas são justificados nos Resultados 2.9 e 2.10, e não antes.

O vetor dual do spin, e o fator um meio

$\mathbf{W}$ é antissimétrico, e portanto tem apenas três componentes independentes. Em U1.T2 essas três componentes foram reunidas em um vetor, o **vetor dual** $\mathbf{w}$, definido por $\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a}$. Naquela sessão o vetor dual era um objeto puramente algébrico, e ficou registrado que a sua interpretação cinemática seria dada aqui. O resultado a seguir a dá, e fixa de uma vez o fator $\frac{1}{2}$ que o acompanha.

RESULTADO 2.8 – O VETOR DUAL DO SPIN

Seja $\mathbf{w}$ o vetor dual de $\mathbf{W}$, de modo que $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$ (U1.T2). Então

$$w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \omega_k \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{direta})$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ é a **vorticidade**. O vetor dual do spin é, portanto, **metade** da vorticidade. (Ruderman 2019, seq. 3.6)

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

A relação com o rotacional é de (Ruderman 2019, seq. 3.6). A leitura do vetor dual como **velocidade angular** é de (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.14), que não escreve o rotacional nesse ponto. Note também, com (Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.14), que $\mathbf{w}$ é a velocidade angular da parcela de rotação: os elementos materiais que giram exatamente com essa velocidade angular são os que estão nas direções principais de $\mathbf{D}$, porque só sobre eles $\mathbf{D}$ não acrescenta rotação.

Os dois símbolos designam objetos diferentes e não são intercambiáveis. Neste curso, $\boldsymbol{\omega}$ é sempre o rotacional da velocidade, e $\mathbf{w}$ é sempre o vetor dual do spin; a relação entre eles é a do Resultado 2.8, e o fator $\frac{1}{2}$ nunca é omitido. A vorticidade volta como objeto de estudo próprio em U5.T2; aqui ela aparece apenas como o rotacional que fornece $\mathbf{w}$.

Obtenção. Inverta a relação entre $\mathbf{W}$ e o seu vetor dual, como feito em U1.T2: de $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$ segue $w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij}$. Substitua a expressão de W_{ij} do Resultado 2.7:

$$w_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{4} \left(\varepsilon_{kij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{kij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

No segundo termo troque os nomes dos índices mudos i e j ; ele vira $\varepsilon_{kji} \partial v_i / \partial x_j = -\varepsilon_{kij} \partial v_i / \partial x_j$. Os dois termos se somam, e resta $w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kji} \partial v_i / \partial x_j$, que é metade da componente k do rotacional.

A decomposição local do campo de velocidade

Reúna agora as duas peças. Substituindo $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ na expansão de Taylor, e trocando a ação de $\mathbf{W}$ pelo produto vetorial com o seu vetor dual, obtém-se a leitura completa do movimento na vizinhança de um ponto.

RESULTADO 2.9 – DECOMPOSIÇÃO LOCAL DO CAMPO DE VELOCIDADE

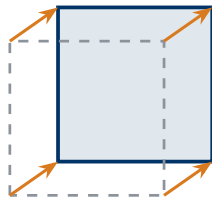
Para $|d\mathbf{x}|$ pequeno,

$$v_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_{ijk} w_j dx_k + D_{ij} dx_j \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{w} \times d\mathbf{x} + \mathbf{D} d\mathbf{x} \quad (\text{direta})$$

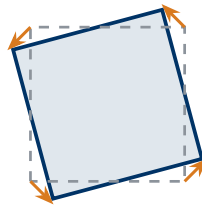
As três parcelas são, nesta ordem: **translação** com a velocidade da partícula de referência, **rotação rígida** com velocidade angular $\mathbf{w}$, e **estiramento puro** governado por $\mathbf{D}$. (Ruderman 2019, seq. 3.6; Lai, Rubin, e Kreml 2010, seq. 3.14)

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.



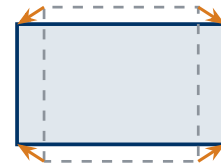
translação

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})$$



rotação rígida

$$\mathbf{w} \times d\mathbf{x}$$



estiramento puro

$$\mathbf{D} d\mathbf{x}$$

Tracejado: o elemento no instante t . Cheio: o mesmo elemento um instante depois, sob a ação daquela parcela apenas. As setas laranja são a parcela, avaliada em cada canto.

Figura 6: As três parcelas do Resultado 2.9, cada uma agindo sozinha sobre o mesmo elemento material. A translação não muda forma nem orientação; a rotação rígida muda a orientação e não a forma; o estiramento muda a forma e não gira os eixos principais.

A palavra “rígida” na segunda parcela tem conteúdo preciso, e ele é justificado já a seguir: a parcela $\mathbf{w} \times d\mathbf{x}$ não altera o comprimento de $d\mathbf{x}$. A justificativa é de uma linha. Pelo Resultado

2.7,

$$\frac{D}{Dt} (|d\mathbf{x}|^2) = 2 d\mathbf{x} \cdot \frac{D}{Dt} (d\mathbf{x}) = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{x} + 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} d\mathbf{x},$$

e o último termo é nulo, porque $\mathbf{W}$ é antissimétrico: para qualquer vetor $\mathbf{a}$ vale $\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}$, logo esse número é igual ao seu oposto (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.13). **Só $\mathbf{D}$ muda comprimentos.**

O que as componentes de $\mathbf{D}$ medem

RESULTADO 2.10 – SIGNIFICADO DAS COMPONENTES DA TAXA DE DEFORMAÇÃO

Seja $\mathbf{D}$ a taxa de deformação em um ponto.

1. Para um elemento material na direção unitária $\mathbf{n}$, a **taxa de alongamento por unidade de comprimento** vale

$$\frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = n_i D_{ij} n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}$$

— igual nas duas notações, e escrita nas duas.

2. Para dois elementos nas direções perpendiculares $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, a **taxa de decréscimo do ângulo** entre eles vale $2D_{12}$; analogamente para os outros dois pares.
3. O primeiro invariante de $\mathbf{D}$ é a **taxa de variação relativa de volume**:

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = D_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{indicial})$$

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v} \quad (\text{direta})$$

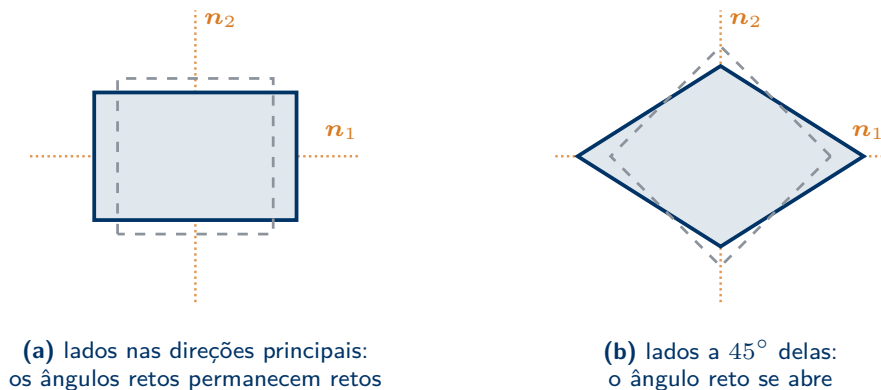
(Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.13)

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

O item 3 é o que esta sessão deixa para a Unidade 3, e convém guardá-lo com todas as letras: $\text{div } \mathbf{v}$ **é a taxa com que um elemento material ganha volume, por unidade de volume**. Ele reaparece na conservação de massa, ainda nesta sessão, e em toda a Unidade 3.

Como $\mathbf{D}$ é simétrico e real, ele tem três direções principais mutuamente perpendiculares (U1.T2). Nelas, pelo item 2, as taxas de cisalhamento se anulam: um elemento alinhado com as direções principais apenas estica, sem que os seus ângulos retos se abram.

Note o que essa figura afirma e o que ela não afirma. A taxa de cisalhamento não é uma propriedade do material nem do escoamento sozinho: ela depende também do **par de direções** escolhido. Trocar de direções muda o número; trocar de material, não — este curso ainda não introduziu material nenhum.



A mesma $\mathbf{D}$ nos dois painéis; pontilhado laranja: as direções principais de $\mathbf{D}$. A taxa de cisalhamento é nula em (a) e não é nula em (b) — ela depende do par de direções, não do material.

Figura 7: A mesma taxa de deformação, em dois elementos com orientações diferentes. Em (a) os lados estão nas direções principais e os ângulos retos permanecem retos; em (b) eles estão a 45° delas, e o ângulo reto se abre.

O campo-exemplo da unidade, revisitado

O campo fixado em U2.T1 volta aqui, agora para ser desmontado nas três parcelas do Resultado 2.9. Ele é

$$v_1 = \alpha x_2, \quad v_2 = \beta t, \quad v_3 = 0,$$

com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ constantes.

O gradiente de velocidade. Apenas uma das nove derivadas é não nula, a saber $\partial v_1 / \partial x_2 = \alpha$:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O termo βt não aparece. Ele é uniforme no espaço, e o gradiente só enxerga variação espacial: uma parcela igual em todos os pontos translada a vizinhança inteira sem deformá-la.

As duas partes. Simetrizando e antissimetrizando:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ -\alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O vetor dual. De $W_{12} = -\varepsilon_{12k} w_k = -w_3$ e $W_{12} = \alpha/2$ vem $w_3 = -\alpha/2$, isto é, $\mathbf{w} = -\frac{\alpha}{2} \mathbf{e}_3$. A verificação pelo Resultado 2.8 é imediata: $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \mathbf{e}_3 = -\alpha \mathbf{e}_3$, e de fato $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$. O sinal negativo diz que a vizinhança gira no sentido horário.

As direções principais de $\mathbf{D}$. Os autovalores de $[\mathbf{D}]$ são $+\alpha/2$, $-\alpha/2$ e 0 , com autovetores

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Pelo Resultado 2.10, um elemento material ao longo de $\mathbf{n}_1$ estica à taxa $\alpha/2$, e um ao longo de $\mathbf{n}_2$ encurta à mesma taxa. As duas direções formam 45° com os eixos.

O volume. $\text{tr } \mathbf{D} = 0$, logo $\text{div } \mathbf{v} = 0$: cada elemento material conserva o seu volume, embora mude de forma o tempo todo. O que ele ganha em uma direção principal, perde na outra.

Em resumo, este escoamento é, ponto a ponto: uma translação, mais uma rotação horária de velocidade angular $\alpha/2$, mais um estiramento a 45° com taxa $\alpha/2$. A conta correspondente, para outro campo, é o exercício [PS1.6](#).

Movimento rígido: o caso em que $\mathbf{D}$ se anula

A equação cinemática do movimento rígido foi obtida em [U2.T1](#), no Resultado 2.4: existem uma função $\mathbf{c}(t)$ e um tensor ortogonal $\mathbf{R}(t)$ tais que

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{R}(t) (\mathbf{X} - \mathbf{c}(0)).$$

Naquela sessão ficou pendente uma pergunta: como esse movimento se enxerga no gradiente de velocidade? O resultado abaixo responde, e responde nos dois sentidos.

RESULTADO 2.11 – MOVIMENTO RÍGIDO E TAXA DE DEFORMAÇÃO NULA

Considere um corpo que ocupa uma região **conexa**: dois pontos quaisquer dela podem ser ligados por um caminho que não sai da região.

1. Se o movimento é rígido, então o campo de velocidade vale

$$v_i = \dot{c}_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j (x_k - c_k) \quad (\text{indicial})$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (\text{direta})$$

e $\mathbf{D} \equiv 0$ em todo o corpo.

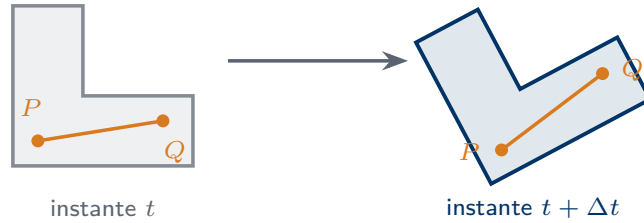
2. Reciprocamente, se $\mathbf{D} \equiv 0$ em todo o corpo, o movimento é rígido.

Descrição espacial — as derivadas são tomadas em $\mathbf{x}$.

Demonstração do item 1. Derive a equação cinemática com $\mathbf{X}$ fixo: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{X} - \mathbf{c}(0))$. A mesma equação, resolvida para $\mathbf{X} - \mathbf{c}(0)$, dá $\mathbf{X} - \mathbf{c}(0) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x} - \mathbf{c})$, porque $\mathbf{R}$ é ortogonal. Substituindo,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x} - \mathbf{c}), \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T.$$

O tensor Ω é antissimétrico: derivando $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$ no tempo, obtém-se $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^\top = \mathbf{0}$, isto é, $\Omega + \Omega^\top = \mathbf{0}$. Como $\dot{\mathbf{c}}$ e $\mathbf{c}$ não dependem de $\mathbf{x}$, o gradiente do campo de velocidade é $\nabla \mathbf{v} = \Omega$. A parte simétrica de um tensor antissimétrico é nula, logo $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{W} = \Omega$. Chamando $\mathbf{w}$ o vetor dual de Ω , a ação de Ω vira o produto vetorial do enunciado. $\square$



A distância entre P e Q é a mesma nos dois instantes, e o mesmo vale para qualquer outro par de pontos do corpo. Nenhum elemento material estica: $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, e resta apenas o spin $\mathbf{W}$.

Figura 8: Num movimento rígido a distância entre dois pontos materiais quaisquer não muda. É essa invariância que o cálculo traduz em $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$.

Demonstração do item 2. Se $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, então $\partial v_i / \partial x_j = W_{ij}$ em todo ponto. Deriva-se essa igualdade e usa-se duas vezes a igualdade das derivadas mistas, mais a antissimetria de $\mathbf{W}$, na seguinte cadeia:

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial W_{ik}}{\partial x_j} = -\frac{\partial W_{kj}}{\partial x_i} = \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial W_{ji}}{\partial x_k} = -\frac{\partial W_{ij}}{\partial x_k}.$$

Cada passo troca uma derivada mista de lugar ou aplica $W_{ab} = -W_{ba}$. O primeiro e o último membro diferem por um sinal, logo ambos são nulos: $\mathbf{W}$ não depende da posição. Integrando $\partial v_i / \partial x_j = W_{ij}$ com $\mathbf{W}$ constante, ao longo de um caminho dentro do corpo — e é aqui que a conexidade é usada —, obtém-se

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

que é exatamente a forma do item 1, com $\mathbf{w}$ o vetor dual de $\mathbf{W}$. $\square$

Por que a mecânica dos corpos rígidos é um capítulo deste assunto

O Resultado 2.11 fecha o item da ementa sobre corpos rígidos, e o fecha de um modo específico, que vale enunciar. O corpo rígido não é um objeto de outra teoria: é o caso particular em que a cinemática local **degenera**. Num meio contínuo geral, o movimento da vizinhança de cada ponto tem nove graus de liberdade, as nove componentes de $\nabla \mathbf{v}$, e eles variam de ponto para ponto. Impondo $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, restam apenas $\mathbf{W}$ antissimétrico — três números — e a velocidade de um ponto de referência — outros três. Seis números descrevem o corpo inteiro, e não mais um campo por ponto.

É essa redução de um campo a seis números que torna a mecânica dos corpos rígidos um assunto separado, com equações próprias. A ordem lógica, porém, é a inversa da ordem histórica: o rígido é o caso degenerado do contínuo, e não o contínuo uma generalização do rígido.

Guarde também a leitura de **D** que este resultado autoriza, porque ela volta na Unidade 4: **um movimento rígido tem $D = 0$** , e qualquer descrição do comportamento de um material que dependa de **D** atribui, automaticamente, efeito nulo a um movimento rígido.

Deformação finita: um sobrevoo

Tudo o que foi feito até aqui vale ou para deformações infinitesimais — o caso de **E** — ou para taxas instantâneas — o caso de **D**. Existe uma descrição exata, válida para deformações de qualquer tamanho, e esta seção a apresenta em sobrevoo: **enunciados e figuras, sem demonstrações**. O material completo está no [handout de deformação finita](#), que acompanha esta sessão. Os objetos abaixo são usados nominalmente em U4.T1.

DEFINIÇÃO 2.8 – GRADIENTE DE DEFORMAÇÃO

O **gradiente de deformação F** é o gradiente material do movimento:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad dx_i = F_{ij} dX_j \quad (\text{indicial})$$

$$F = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \quad d\mathbf{x} = F d\mathbf{X} \quad (\text{direta})$$

A invertibilidade do movimento, assumida em U2.T1, equivale a $\det F > 0$. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.18)

Descrição material — deriva-se em **X**, e o resultado age sobre elementos da configuração de referência.

RESULTADO 2.12 – DECOMPOSIÇÃO POLAR

Todo tensor **F** com $\det F \neq 0$ se escreve, de modo único, como

$$F = R U = V R \quad (\text{igual nas duas notações}),$$

com **R** ortogonal própria — isto é, $\det R = +1$ — e **U**, **V** simétricos e **positivos definidos**, o que significa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} \mathbf{a} > 0$ para todo $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. **U** e **V** chamam-se tensores de estiramento à direita e à esquerda. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.21)

A leitura de **F** = **RU** é da direita para a esquerda: primeiro um estiramento puro ao longo de três direções perpendiculares, depois uma rotação rígida.

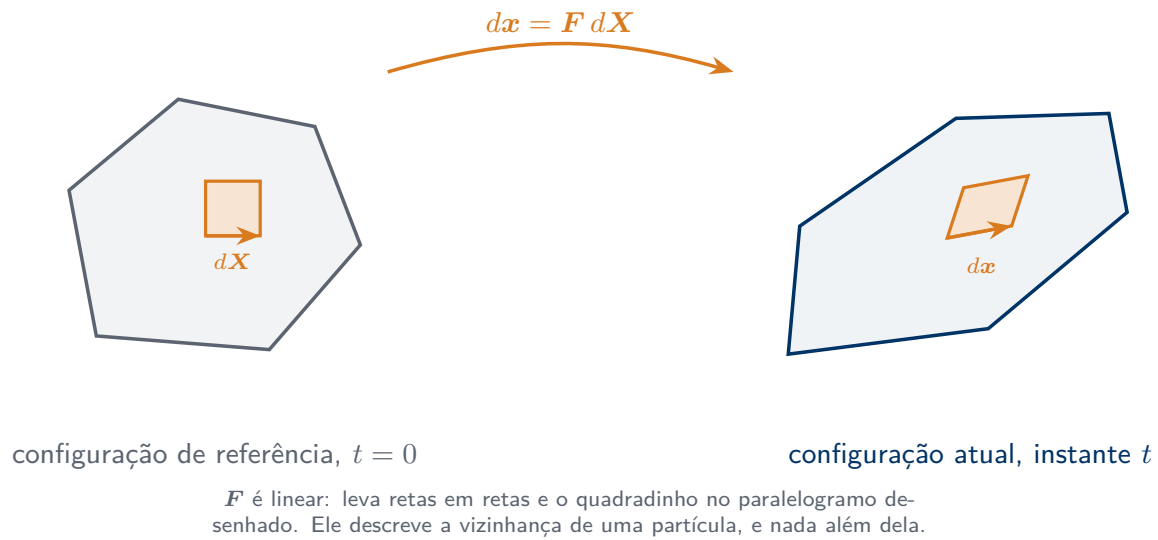


Figura 9: O gradiente de deformação é o retrato linear local do movimento: ele leva o elemento material $d\mathbf{X}$ em $d\mathbf{x}$, e um quadrado em um paralelogramo. O diagrama é o de U2.T1, com o ponto marcado trocado por um elemento com tamanho.

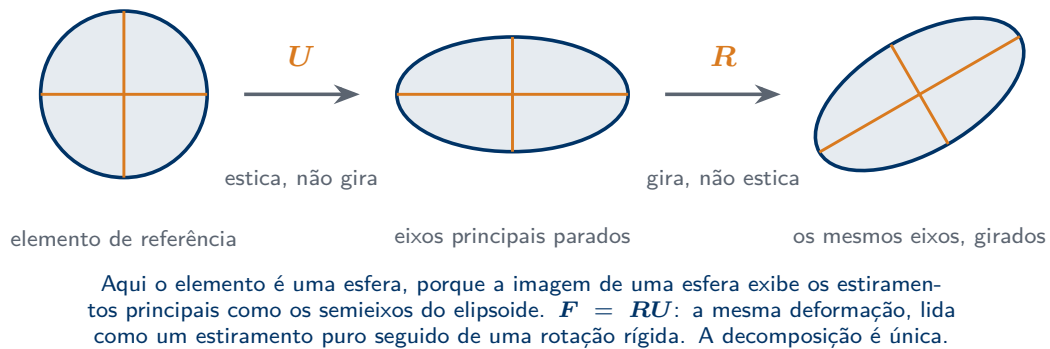


Figura 10: A decomposição polar em dois passos. Sob U o elemento estica e os eixos principais ficam parados; sob R ele gira sem mudar de forma.

RESULTADO 2.13 – TENSOR DE CAUCHY-GREEN À DIREITA

Definindo $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$, vale

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (\text{indicial})$$

$$dx_i^{(1)} dx_i^{(2)} = dX_i^{(1)} C_{ij} dX_j^{(2)}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{direta})$$

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}^{(2)}$$

Portanto $\mathbf{C}$ contém todos os comprimentos e ângulos da configuração atual, medidos em variáveis materiais. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.23) Além disso, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ caracteriza os movimentos rígidos (Ruderman 2019, seq. 3.4); a recíproca é imediata pelo Resultado 2.12, porque $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ força $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ e, com isso, $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

RESULTADO 2.14 – MUDANÇAS DE VOLUME E DE ÁREA

Um elemento de volume e um elemento de área se transformam segundo

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (\text{indicial})$$

$$n_i dA = (\det \mathbf{F}) (F^{-1})_{ji} (n_0)_j dA_0$$

$$dV = (\det \mathbf{F}) dV_0 \quad (\text{direta})$$

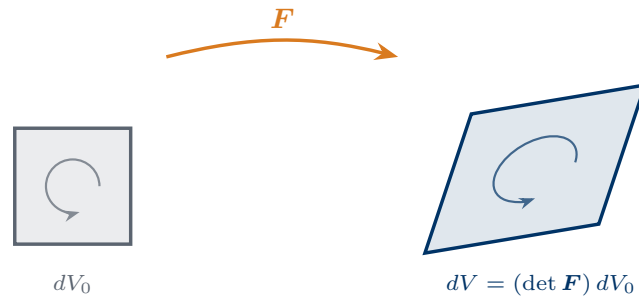
$$\mathbf{n} dA = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0 dA_0$$

A segunda relação é a fórmula de Nanson; ela é apenas exibida aqui. (Lai, Rubin, e Krempl 2010, seq. 3.27–3.28)

A ligação com o que veio antes. $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ são as versões linearizada e instantânea desta maquinaria: $\mathbf{E}$ aproxima a informação de $\mathbf{C}$ quando o deslocamento e as suas derivadas são pequenos, e $\mathbf{D}$ mede a taxa com que essa informação muda. As três descrições contam a mesma história, em três regimes distintos.

Conservação de massa, enunciada

Esta sessão termina com uma equação que **não será demonstrada aqui**.



Aqui $\det \mathbf{F} = 1,70$: o elemento ocupa 70% a mais de volume. A exigência $\det \mathbf{F} > 0$ é a mesma invertibilidade assumida em U2.T1, agora com um número associado a ela.

Figura 11: O fator pelo qual $\mathbf{F}$ multiplica o volume é $\det \mathbf{F}$. A exigência $\det \mathbf{F} > 0$ é a invertibilidade de U2.T1, agora com um número associado a ela.

RESULTADO 2.15 – CONSERVAÇÃO DE MASSA (DEMONSTRAÇÃO EM U3.T1)

Seja $\rho(\mathbf{x}, t)$ a densidade do meio, isto é, a massa por unidade de volume. Então

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{indicial})$$

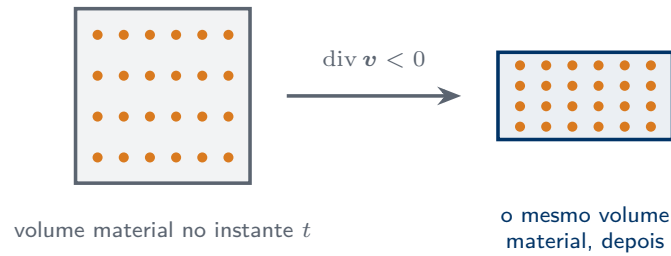
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{direta})$$

Descrição espacial — ρ e $\mathbf{v}$ são campos de $\mathbf{x}$, e D/Dt é a derivada material do Resultado 2.1 de U2.T1.

Chame **volume material** uma porção do meio que se move com ele: ela é sempre formada pelas mesmas partículas, e por isso a sua fronteira acompanha o escoamento. O que se pode dar agora é um argumento de plausibilidade — e ele é um argumento de plausibilidade, não uma demonstração. Pelo Resultado 2.10, $\operatorname{div} \mathbf{v}$ é a taxa relativa de variação de volume de um elemento material. Se a massa dentro desse elemento não muda enquanto ele se move, então densidade e volume têm de variar em sentidos opostos, e a equação acima é exatamente essa contabilidade escrita por unidade de tempo.

Falta o que faz uma demonstração: um enunciado preciso do que significa “a massa dentro de um volume que se move com o material”, e uma regra para derivar no tempo uma integral cujo domínio muda com o tempo. Essa regra é o **Teorema do Transporte (TTR)**, e ela abre a Unidade 3. A partir dela, a conservação de massa sai como primeira consequência, e o mesmo procedimento produz todas as demais leis de balanço do curso.

A equação fica, portanto, registrada como dívida: enunciada agora, demonstrada em U3.T1. Quem quiser adiantar a leitura encontra a conservação de massa em (Lai, Rubin, e Krempf).



A mesma massa em metade do volume: a densidade dobra. A conservação de massa é a forma instantânea desta contabilidade.

Figura 12: A mesma massa em metade do volume: a densidade dobra. A equação do Resultado 2.15 é a forma instantânea desta contabilidade.

2010, seq. 3.15) e, nas duas formas, em (Ruderman 2019, seq. 3.7–3.8).

Exercícios propostos

Considere o campo de velocidade

$$v_1 = 3k x_2, \quad v_2 = k x_1, \quad v_3 = k x_3,$$

com $k > 0$ constante.

(a) Escreva a matriz de $\nabla \mathbf{v}$ e obtenha $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{W}]$ pelo Resultado 2.7.

(b) *O vetor dual, por dois caminhos.* Obtenha $\mathbf{w}$ a partir de $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$, componente a componente. Depois obtenha $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ diretamente do campo, e verifique o Resultado 2.8. Se os dois caminhos discordarem em um sinal, indique em qual deles está o erro.

(c) *Direções principais.* Obtenha os autovalores e as direções principais de $\mathbf{D}$. Qual elemento material estica mais depressa, e a que taxa? Qual encurta? *Sugestão:* o bloco 1–2 de $[\mathbf{D}]$ se diagonaliza sozinho, e a direção $\mathbf{e}_3$ já é principal.

(d) *Volume.* Calcule $\text{tr } \mathbf{D}$ e $\text{div } \mathbf{v}$, confirme que coincidem, e diga se um elemento material deste escoamento ganha ou perde volume. Use o Resultado 2.10 para justificar a resposta em uma frase.

(e) *Um teste de sanidade.* Este movimento é rígido? Responda usando o Resultado 2.11, e não a intuição.

(f) *Verificação numérica.* Com numpy, monte a matriz de $\nabla \mathbf{v}$ para $k = 1$, obtenha $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{W}]$ por álgebra matricial, e recupere $\mathbf{w}$ contraindo o símbolo de permutação com `np.einsum`, como no laboratório U1.L1. Diagonalize $[\mathbf{D}]$ com `numpy.linalg.eigh` e compare autovalores e autovetores com os do item (c). Informe a maior diferença obtida e comente a sua ordem de grandeza.

A Lista 1, completa

Com o exercício acima, a **Lista 1** fica fechada em seis itens. O enunciado consolidado, com todos os roteiros, está em [PS1 – enunciado](#).

Item	Assunto	Proposto em
PS1.1	Manipulações indiciais e a identidade entre os símbolos de permutação	U1.T1
PS1.2	Unicidade da decomposição simétrica e antissimétrica	U1.T1
PS1.3	Divergência de um tensor em coordenadas cilíndricas	U1.T2
PS1.4	Invariância do traço e dos demais invariantes principais	U1.T2

Item	Assunto	Proposto em
PS1.5	Descrições do movimento, derivada material e as duas famílias de curvas	U2.T1
PS1.6	Taxa de deformação, spin e direções principais	U2.T2

Estudo complementar, não avaliado. De (Ruderman 2019): os problemas **3.4, 3.5 e 3.8** tratam de deformação, mudança de volume e conservação de massa; os problemas **3.6 e 3.7** retomam linhas de corrente e trajetórias, assunto de U2.T1. Nenhum problema daquele capítulo trata da decomposição em $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$ — esse conteúdo é coberto por PS1.6. As soluções completas encontram-se no próprio livro; por essa razão tais problemas são indicados como estudo dirigido e não como exercícios avaliados.

Referências

- Lai, W. Michael, David Rubin, e Erhard Krempel. 2010. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4^o ed. Butterworth-Heinemann.
- Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.