

Lista 1 — enunciado

Unidades 1 e 2 · MAE369 · IM/UFRJ · 2026/2

Esta é a **Lista 1** da disciplina, com seis itens. Ela cobre as Unidades 1 e 2: notação indicial e álgebra tensorial, cálculo tensorial, e cinemática do contínuo. A data de entrega segue o calendário da disciplina.

Como esta lista é para ser feita

Todos os itens são **derivações guiadas**: o enunciado conduz a dedução por passos, e indica em qual resultado das notas cada passo se apoia. Escreva a justificativa de cada passo, e não apenas a conta. Onde um item pede verificação numérica, entregue o código junto da resposta, com o valor obtido e um comentário sobre a sua ordem de grandeza.

Cada item traz, no cabeçalho desta página, a sessão em que foi proposto. As notas daquela sessão são a referência primeira; os livros vêm depois dela.

Item	Assunto	Proposto em
PS1.1	Manipulações indiciais e a identidade entre os símbolos de permutação	U1.T1
PS1.2	Unicidade da decomposição simétrica e antissimétrica	U1.T1
PS1.3	Divergência de um tensor em coordenadas cilíndricas	U1.T2
PS1.4	Invariância do traço e dos demais invariantes principais	U1.T2
PS1.5	Descrições do movimento, derivada material e as duas famílias de curvas	U2.T1
PS1.6	Taxa de deformação, spin e direções principais	U2.T2

Unidade 1 — notação indicial e álgebra tensorial

PS1.1

Proposto em U1.T1.

PS1.1 – MANIPULAÇÕES INDICIAIS (DERIVAÇÃO GUIADA)

(a) Verifique os casos 3 e 4 da demonstração do Resultado 1.1, apresentados na [tabela daquela demonstração](#). Justifique, em cada caso, por que ambos os lados assumem o valor indicado.

(b) Usando o resultado de (a), mostre que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Sugestão: faça $m = j$ no Resultado 1.1 e some sobre j ; em seguida repita a operação sobre a expressão obtida.

(c) Usando o Resultado 1.1, e não argumentos geométricos, mostre que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Sugestão: escreva o lado esquerdo em componentes, com dois símbolos de permutação; aplique o Resultado 1.1; use os deltas resultantes para substituir índices.

PS1.2

Proposto em U1.T1.

PS1.2 – UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

Um tensor S é **simétrico** se $S^T = S$, e A é **antissimétrico** se $A^T = -A$.

(a) Mostre que todo tensor T admite a decomposição $T = S + A$, com S simétrico e A antissimétrico. *Sugestão:* some e subtraia $\frac{1}{2}T^T$.

(b) Mostre que essa decomposição é única. *Sugestão:* suponha $S_1 + A_1 = S_2 + A_2$, transponha a igualdade e combine as duas expressões.

(c) Escreva S e A em componentes. Quantas componentes independentes possui cada um?

Este exercício utiliza apenas o transposto e a linearidade, introduzidos nesta sessão.

Unidade 1 — cálculo tensorial

PS1.3

Proposto em U1.T2.

PS1.3 – DIVERGÊNCIA DE UM TENSOR EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

O objetivo é obter, do zero, a componente radial de $\text{div } \mathbf{T}$ em coordenadas cilíndricas, e conferir o resultado contra a linha correspondente do formulário. Considere um campo tensorial $\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$, com $\alpha, \beta \in \{r, \theta, z\}$, e a base local $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$.

(a) Escreva as seis derivadas $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial \theta$ e $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial r$, para $\alpha \in \{r, \theta, z\}$. Três delas estão na seção **O que muda, e o que não muda**; obtenha as outras três e justifique cada uma em uma linha.

(b) O operador ∇ em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Justifique o fator $1/r$ do segundo termo comparando o deslocamento $d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$ com a identidade $d\varphi = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{x}$.

(c) Usando o resultado de (b), escreva $\text{div } \mathbf{T}$ como a contração de ∇ com $\mathbf{T}$ segundo a convenção fixada nas **duas convenções de cálculo**, e identifique quais termos exigem derivar os vetores de base.

(d) Usando (a) e (c), obtenha $(\text{div } \mathbf{T})_r$, isto é, a componente segundo $\mathbf{e}_r$. *Sugestão:* apenas os termos em que uma derivada de base produz $\mathbf{e}_r$ contribuem além dos termos “cartesianos”; pelo item (a), são poucos.

(e) Compare o resultado de (d) com a linha correspondente do formulário. Se houver discrepância, indique em qual dos passos anteriores ela se origina.

Este exercício tem roteiro mais detalhado que os demais porque a dedução correspondente não é feita em aula.

PS1.4

Proposto em U1.T2.

PS1.4 – OS INVARIANTES SOB MUDANÇA DE BASE

Sejam $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{e}'_i\}$ duas bases ortonormais relacionadas pelo tensor ortogonal $\mathbf{Q}$, com $Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$, de modo que $T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$ (U1.T1, **lei de transformação**).

(a) Mostre que $I'_1 = I_1$, isto é, que $T'_{ii} = T_{ii}$. *Sugestão:* faça $j = i$ na lei de transformação e use $Q_{mi} Q_{ni} = \delta_{mn}$.

- (b) Mostre que $T'_{ij}T'_{ji} = T_{ij}T_{ji}$. *Sugestão:* escreva as duas transformações, agrupe os quatro fatores Q em dois pares e aplique duas vezes a relação de ortogonalidade usada em (a).
- (c) Conclua de (a) e (b) que $I'_2 = I_2$.
- (d) Mostre que $I'_3 = I_3$. *Sugestão:* na forma direta, $[T]' = [Q]^T[T][Q]$; use que o determinante de um produto é o produto dos determinantes e que $\det Q = \pm 1$ (Resultado 1.2).
- (e) *Verificação numérica.* Construa uma matriz 3×3 simétrica qualquer e uma rotação Q qualquer, calcule $[T]'$ e compare os três invariantes de $[T]$ e de $[T]'$. Informe as diferenças obtidas e comente sua ordem de grandeza. A mesma verificação é feita no laboratório U1.L1, com numpy.

Unidade 2 — cinemática do contínuo

PS1.5

Proposto em [U2.T1](#).

PS1.5 – DESCRIÇÕES, DERIVADA MATERIAL E AS DUAS FAMÍLIAS DE CURVAS

Considere o campo de velocidade plano

$$v_1 = U_0(1 + \lambda t), \quad v_2 = \gamma x_1, \quad v_3 = 0,$$

com $U_0 > 0$, $\lambda > 0$ e $\gamma > 0$ constantes, e $t \geq 0$.

(a) *As lacunas da derivação.* Obtenha o movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ integrando $\partial x_i / \partial t|_{\mathbf{X}} = v_i$ com $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ em $t = 0$. *Sugestão:* a equação de x_1 não envolve x_2 ; resolva-a primeiro. Em seguida, exiba explicitamente a inversa $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ e verifique que ela existe para **todo** $t \geq 0$. Identifique em qual passo da derivação do Resultado 2.1 essa inversa é usada.

(b) *Da descrição material para a espacial.* Escreva a velocidade na descrição material, $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$, derivando o movimento obtido em (a). Depois, usando a inversa, converta-a de volta e confirme que o resultado é o campo espacial dado no enunciado.

(c) *A aceleração por dois caminhos.* Calcule a pelo Resultado 2.2, componente a componente na notação indicial, e confira compactando na notação direta. Em seguida calcule a de novo, derivando duas vezes o movimento de (a) com $\mathbf{X}$ fixo. Os dois resultados devem coincidir; se não coincidirem, indique em qual passo está o erro.

(d) *Um campo transportado.* A temperatura do meio é $\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_0 + G x_2$, com θ_0 e G constantes. O papel de G aqui é o mesmo da cena de abertura — um gradiente fixo de temperatura — agora ao longo de x_2 . Calcule $D\theta/Dt$. Explique, em uma frase, por que um termômetro parado não registra variação alguma enquanto uma partícula registra.

- (e) As duas famílias.** Para um instante $t_0 > 0$ fixo, obtenha as linhas de corrente em forma fechada, e compare-as com as trajetórias que você já tem de (a). Depois use o Resultado 2.3 para decidir onde as duas famílias coincidem e onde não coincidem. *Atenção:* a resposta não é a mesma em todo o plano — examine separadamente os pontos com $x_1 \neq 0$ e os pontos da reta $x_1 = 0$, e diga o que distingue os dois casos.
- (f) Verificação numérica.** Com numpy, integre numericamente a trajetória de uma partícula a partir de $\mathbf{X} = (1, 1, 0)$, com $U_0 = \lambda = \gamma = 1$, até $t = 2$, e compare com o movimento em forma fechada obtido em (a). Informe a diferença máxima e comente sua ordem de grandeza. Desenhe, na mesma figura, essa trajetória e a linha de corrente que passa pela posição da partícula no instante $t_0 = 1$.

PS1.6

Proposto em U2.T2.

PS1.6 – TAXA DE DEFORMAÇÃO, SPIN E DIREÇÕES PRINCIPAIS

Considere o campo de velocidade

$$v_1 = 3k x_2, \quad v_2 = k x_1, \quad v_3 = k x_3,$$

com $k > 0$ constante.

- (a)** Escreva a matriz de $\nabla \mathbf{v}$ e obtenha $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{W}]$ pelo Resultado 2.7.
- (b) O vetor dual, por dois caminhos.** Obtenha $\mathbf{w}$ a partir de $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} w_k$, componente a componente. Depois obtenha $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ diretamente do campo, e verifique o Resultado 2.8. Se os dois caminhos discordarem em um sinal, indique em qual deles está o erro.
- (c) Direções principais.** Obtenha os autovalores e as direções principais de $\mathbf{D}$. Qual elemento material estica mais depressa, e a que taxa? Qual encurta? *Sugestão:* o bloco 1–2 de $[\mathbf{D}]$ se diagonaliza sozinho, e a direção $\mathbf{e}_3$ já é principal.
- (d) Volume.** Calcule $\text{tr } \mathbf{D}$ e $\text{div } \mathbf{v}$, confirme que coincidem, e diga se um elemento material deste escoamento ganha ou perde volume. Use o Resultado 2.10 para justificar a resposta em uma frase.
- (e) Um teste de sanidade.** Este movimento é rígido? Responda usando o Resultado 2.11, e não a intuição.
- (f) Verificação numérica.** Com numpy, monte a matriz de $\nabla \mathbf{v}$ para $k = 1$, obtenha $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{W}]$ por álgebra matricial, e recupere $\mathbf{w}$ contraindo o símbolo de permutação com `np.einsum`, como no laboratório U1.L1. Diagonalize $[\mathbf{D}]$ com `numpy.linalg.eigh` e compare autovalores e autovetores com os do item (c). Informe a maior diferença obtida e comente a sua ordem de grandeza.

Auto-estudo, não avaliado

Os problemas abaixo, de (Ruderman 2019), acompanham o assunto da lista. **Eles não valem nota**, e a razão é explícita: o próprio livro traz a solução completa de todos eles, no apêndice A. Servem para conferir a própria compreensão, e por isso vale tentá-los antes de abrir a solução.

Capítulo	Problemas	Assunto
2	2.1 a 2.6	álgebra tensorial, símbolos de permutação, decomposições
2	2.10 a 2.19	cálculo tensorial e coordenadas curvilíneas
3	3.1 e 3.2	descrições do movimento e derivada material
3	3.3, 3.4 e 3.5	deformação e mudança de volume
3	3.6 e 3.7	linhas de corrente e trajetórias
3	3.8	conservação de massa numa esfera em expansão

Nenhum item de PS1 é cópia de um destes problemas. O capítulo 3 de (Ruderman 2019) não traz problema sobre a decomposição em $\mathbf{D}$ e $\mathbf{W}$; esse conteúdo é coberto por PS1.6, que é do curso.

Referências

Ruderman, Michael S. 2019. *Fluid Dynamics and Linear Elasticity: A First Course in Continuum Mechanics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.